Векторы

1. Координаты вектора

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляется, как разность координат конца вектора $B(x_в; y_в)$ и координаты начала вектора $A(x_а; y_а)$:

$\overrightarrow{AB}\{x_в - x_а; y_в - y_а\}$

$B(x_в; y_в)$

$A(x_а; y_а)$:

2. Сложение и вычитание векторов координатами

Чтобы из вектора $\vec{A}$ вычесть вектор $\vec{B}$, мы должны вычесть координаты вектора $\vec{B}$ из координат вектора A.

Чтобы вектор $\vec{A}$ сложить с вектором $\vec{B}$, мы должны сложить координаты вектора A с координатами вектора B.

$\vec{A}(x_а; y_а)$ $\vec{B}(x_в; y_в)$

$\vec{A} + \vec{B}\ \{x_а + x_в; y_а + y_в\}$ $\vec{A} - \vec{B}\ \{x_а - x_в; y_а - y_в\}$

3. Длина вектора

Длина вектора AB вычисляется по следующей формуле:

$y_в$ $y_а$ $x_а$ $x_в$ $y_в - y_а$ $x_в - x_а$

$A(x_а; y_а)$: $B(x_в; y_в)$

$(\overrightarrow{AB})^2 = (x_в - x_а)^2 + (y_в - y_а)^2$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_в - x_а)^2 + (y_в - y_а)^2}$

4. Сложение векторов графически

Правило треугольника

$\vec{A}\{x_а; y_а\}$ $\vec{B}\{x_в; y_в\}$ $\vec{A} + \vec{B}$?

$\vec{A}$ $\vec{B}$ $\vec{A} + \vec{B}$

Правило параллелограмма

$\vec{A}\{x_а; y_а\}$ $\vec{B}\{x_в; y_в\}$ $\vec{A} + \vec{B}$?

$\vec{A}$ $\vec{A} + \vec{B}$ $\vec{B}$

5. Вычитание векторов графически

Правило треугольника

$\vec{A}\{x_а; y_а\}$ $\vec{B}\{x_в; y_в\}$ $\vec{A} - \vec{B}$?

$\vec{A}$ $\vec{A} + (-\vec{B})$ или $\vec{A} - \vec{B}$ $-\vec{B}$

Правило параллелограмма

$\vec{A}\{x_а; y_а\}$ $\vec{B}\{x_в; y_в\}$ $\vec{A} - \vec{B}$?

$\vec{A} + (-\vec{B})$ или $\vec{A} - \vec{B}$ $-\vec{B}$ $\vec{A}$ $-\vec{B}$

6. Скалярное произведение векторов

Известны координаты

$\vec{A}\{x_а; y_а\}$ $\vec{B}\{x_в; y_в\}$

$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = x_а \cdot x_в + y_а \cdot y_в$

Известен угол

$\vec{A}\{x_а; y_а\}$ $\vec{B}\{x_в; y_в\}$ α

$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

Углы

Смежные и вертикальные углы

$\beta + \alpha = 180°$ - смежные углы

β α $150°$ $30°$

Вертикальные углы равны

α α

Углы при двух параллельных прямых и секущей

Если прямые параллельны и пересечены третьей линией то:

Соответственные углы равны

1. α α

Накрест лежащие углы равны

2. α α

сумма односторонних углов равна 180°.

3. α β $\alpha + \beta = 180°$

Признаки параллельности прямых

1. Если соответственные углы равны, то прямые параллельны:

$30°$ $30°$

2. Если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны:

$30°$ $30°$

3. Если сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны:

α β $\alpha + \beta = 180°$

Четырехугольники

Квадрат, прямоугольник

d a a

$S = a^2$
$P = 4a$
$d = \sqrt{2} \cdot a$

a b

$S = a \cdot b$
$P = 2(a + b)$

Параллелограмм

b a a b α α β β

Свойства:

1. Противоположные углы равны
2. Точкой пересечения диагонали делятся попалам

Признаки:

1. Две противоположные стороны равны и параллельны
2. Противоположные стороны попарно параллельны
3. Диагонали точкой пересечения делятся пополам
4. Противоположные углы равны

b a h a b

$S = a \cdot h$

Ромб

B A O C D

$S_{ABCD} = \frac{AC}{2}(BO + DO) = \frac{AC \cdot BD}{2}$

Трапеция

a h b

$S = \frac{(a + b)}{2} \cdot h$

a a/2 b/2 b

m (ср. линия) = $\frac{a + b}{2}$

Вписанный четырёхугольник

B A C D

$\angle A + \angle C = 180°$

Если трапеция вписана в окружность, то она обязательна равнобедренная

Описанный четырёхугольник

b a c d

$a + c = b + d$

Треугольники

Равенство треугольников

Определение: у равных треугольников равны стороны и углы.

Равны стороны, лежащие напротив равных углов

Равны углы, лежащие напротив равных сторон

Признаки равенства треугольников:

1. По двум сторонам и углу между ними:

5 $20°$ 6 5 $20°$ 6

2. По стороне и двум прилежащим углам:

$25°$ $10°$ 8 $25°$ $10°$ 8

3. По трём сторонам:

2 3 4 2 3 4

Признаки подобия

1. По двум сторонам и углу между ними:

2 $10°$ 5 4 $10°$ 10

10 : 5 = 4 : 2
$\angle 10° = \angle 10°$
Следовательно треугольники подобны

2. По двум углам:

3. По трём сторонам:

5 10 15 10 20 30

Как **верно** записать подобие треугольников?

B A C M L K

$\frac{KN}{BC} = \frac{MK}{AC} = \frac{MN}{AB}$ ⟶ △ ABC подобен △ MNK.

Медиана в треугольнике

B C' A' A B' C

1. Все три медианы пересекаются в одной точке.
2. Медиана делит сторону пополам.
3. В точке пересечения медианы делятся в отношении 2 : 1.
4. Медиана делит треугольник на 2 равновеликих.

Биссектриса в треугольнике

C x a y α α b

$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$

Высота в треугольнике

$S = \frac{h \cdot a}{2}$

Подобие треугольников

Определение: треугольники подобны тогда, когда стороны, лежащие напротив равных углов пропорционально равны.

a b c α β γ A B C

$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$ $\frac{B}{b} = k$ - коэффициент подобия

Связь подобия и площади треугольников:

b h a c A H B C

$S_m = \frac{a \cdot h}{2}$ $S_б = \frac{A \cdot H}{2}$ $\frac{S_m}{S_б} = k^2$

Площадь треугольника

1. h a

$S_\triangle = \frac{a \cdot h}{2}$

2. a c α b

$S_\triangle = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\alpha)}{2}$

3. a r r r c α b

$S_\triangle = \frac{P \cdot r}{2} = p \cdot r$

4. a b c

$S_\triangle = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

5. a b c

Формула Герона:

$S_\triangle = \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}$
$p = 1/2(a + b + c)$

Sin, cos, tg, ctg в треугольнике

α a c b

$\sin(a) = \frac{b}{c}$ $\cos(a) = \frac{a}{c}$

$tg(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)} = \frac{b}{a}$

$ctg(a) = \frac{\cos(a)}{\sin(a)} = \frac{a}{b}$

Теорема косинусов

a b c

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$

Прямоугольный треугольник

a c h b

$h = \frac{a \cdot b}{c}$

α y a h x β α β b

$h = \sqrt{x \cdot y}$

Теорема синусов

γ a b β α c

$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2R$

$\frac{b}{\sin(\beta)} = 2R$

$\frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$

Средняя линия треугольника

Определение: отрезок, соединяющий середины сторон

Свойства:

1. Средняя линия параллельна основанию
2. Средняя линия в два раза меньше основания, к которому она параллельна

Равнобедренный треугольник

Определение: Равенство двух сторон.

Свойства:

1. Высота является медианой
2. Углы при основании равны

Признаки:

1. Два угла равны
2. Медиана, высота, биссектриса
   - если медиана является высотой, то треугольник равнобедренный.
   - если медиана является биссектрисой, то треугольник равнобедренный.
   - если высота является биссектрисой, то треугольник равнобедренный.

Окружность

Окружность

A E O C D B

1. O - центр окружности
2. OB - радиус окружности
3. AC - хорда
4. DE - диаметр = 2 радиуса окружности

Углы в окружностях

M β F L K

2. Вписанный угол в два раза меньше дуги на которую он опирается (в градусах).
3. $\angle LMK = \angle LFK$. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу - равны.
4. Центральный угол в два раза больше вписанного.

O α B A α

1. Центральный угол равен дуге на которую он опирается (в градусах).

Секущая

C B A D E

Свойство секущих:

$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

Касательная и секущая

M L K N

$MK^2 = ML \cdot MN$

Касательная

C A O B

1. AB - касательная
2. OB - радиус окружности, проведенный в точку касания
3. Отрезки касательных, проведённых из одной точки - равны. AB = AC

Угол между касательной и хордой

D α B α C A

$\angle ABC = \angle BDC$

Вписанная окружность

Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис

Описанная окружность

Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров