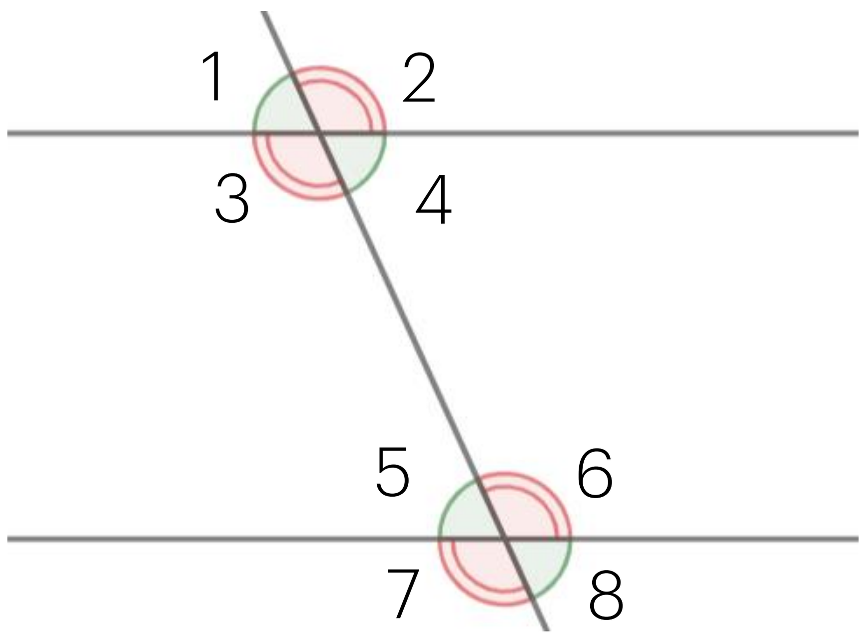
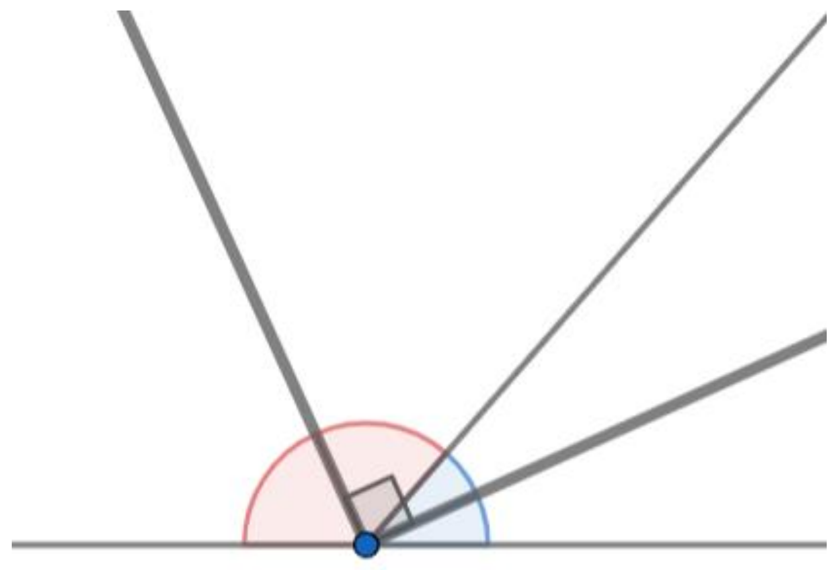
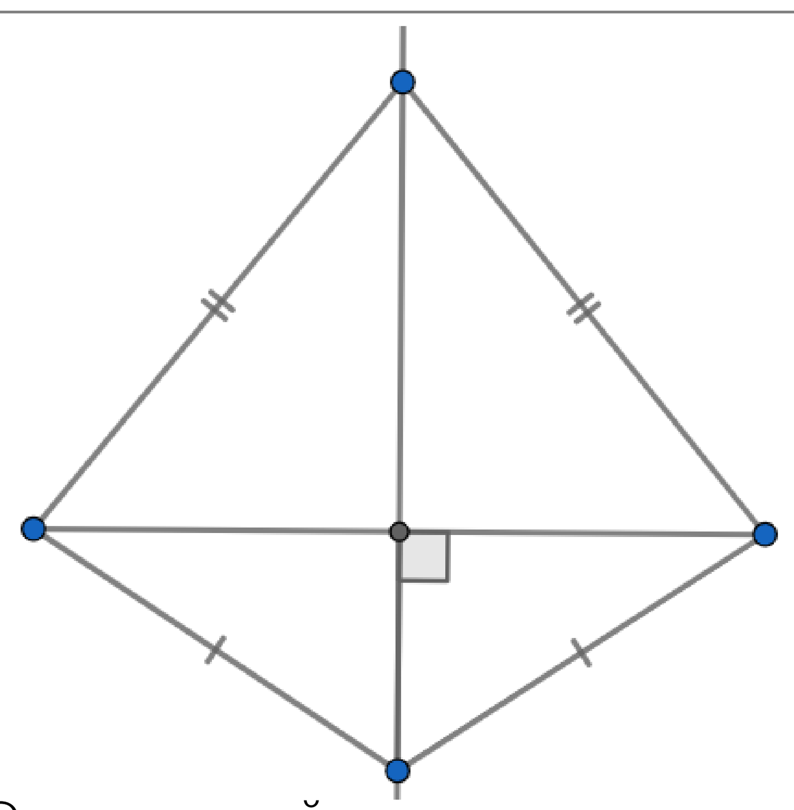
## Основные сведения из планиметрии



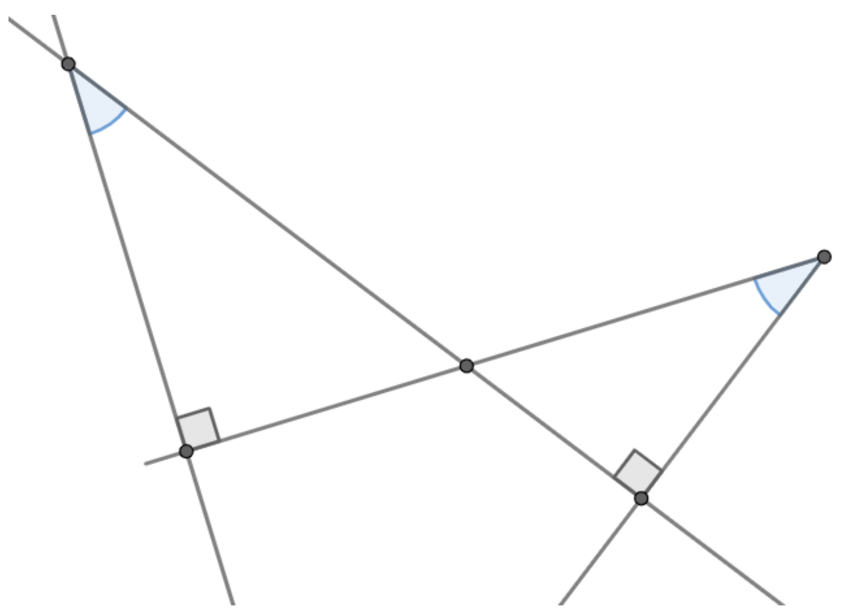



Угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.

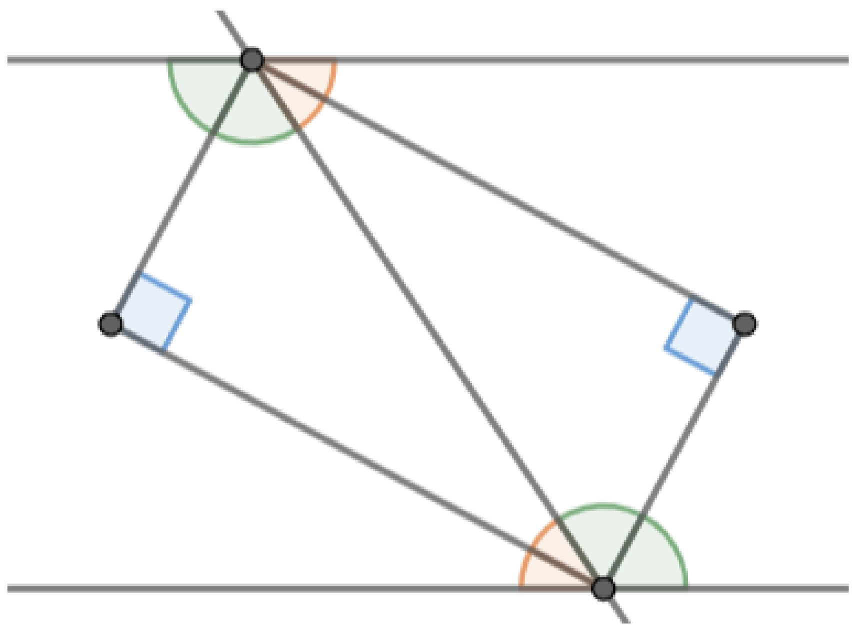
Смежные: 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8, 1 и 3, 2 и 4, 5 и 7, 6 и 8
Вертикальные: 1 и 4, 2 и 3, 5 и 8, 6 и 7
Внутренние накрест лежащие: 4 и 5, 3 и 6
Внешние накрест лежащие: 1 и 8, 2 и 7
Соответсвенные углы: 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8



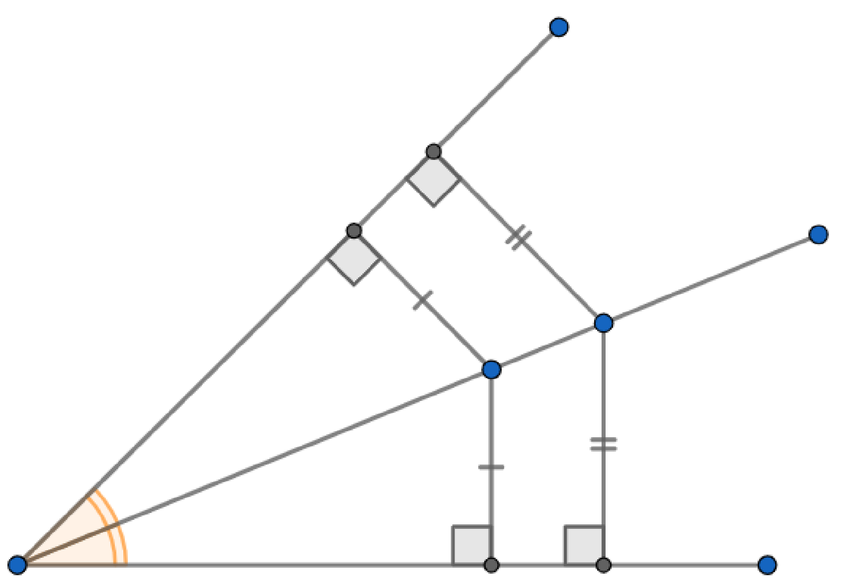
Серединный перпендикуляр. Геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка, есть прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.



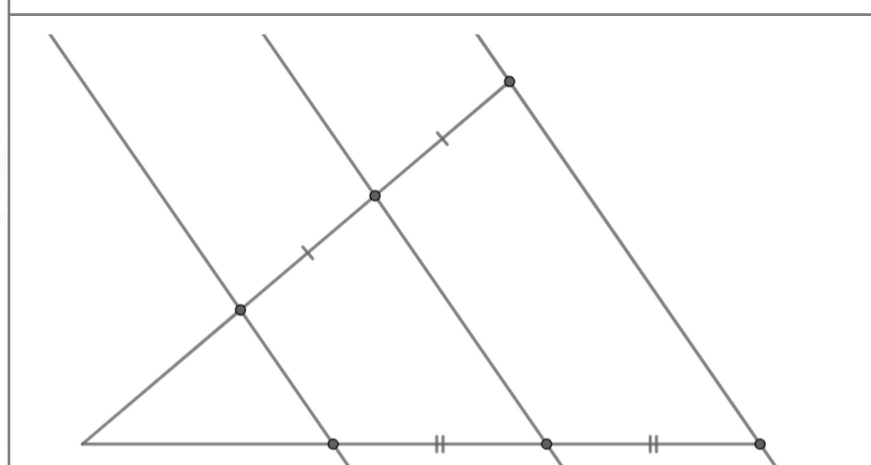
Углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.



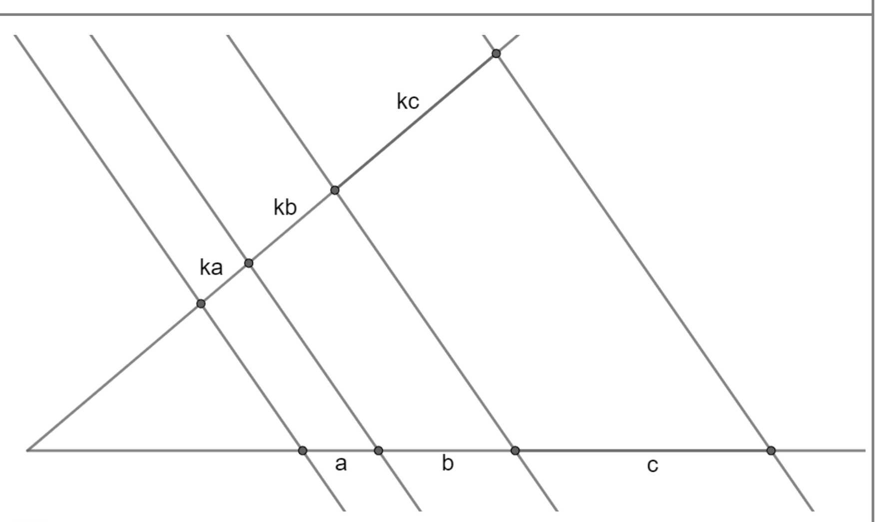
Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.



Геометрическое место внутренних точек угла, равноудалённых от его сторон, есть биссектриса угла.

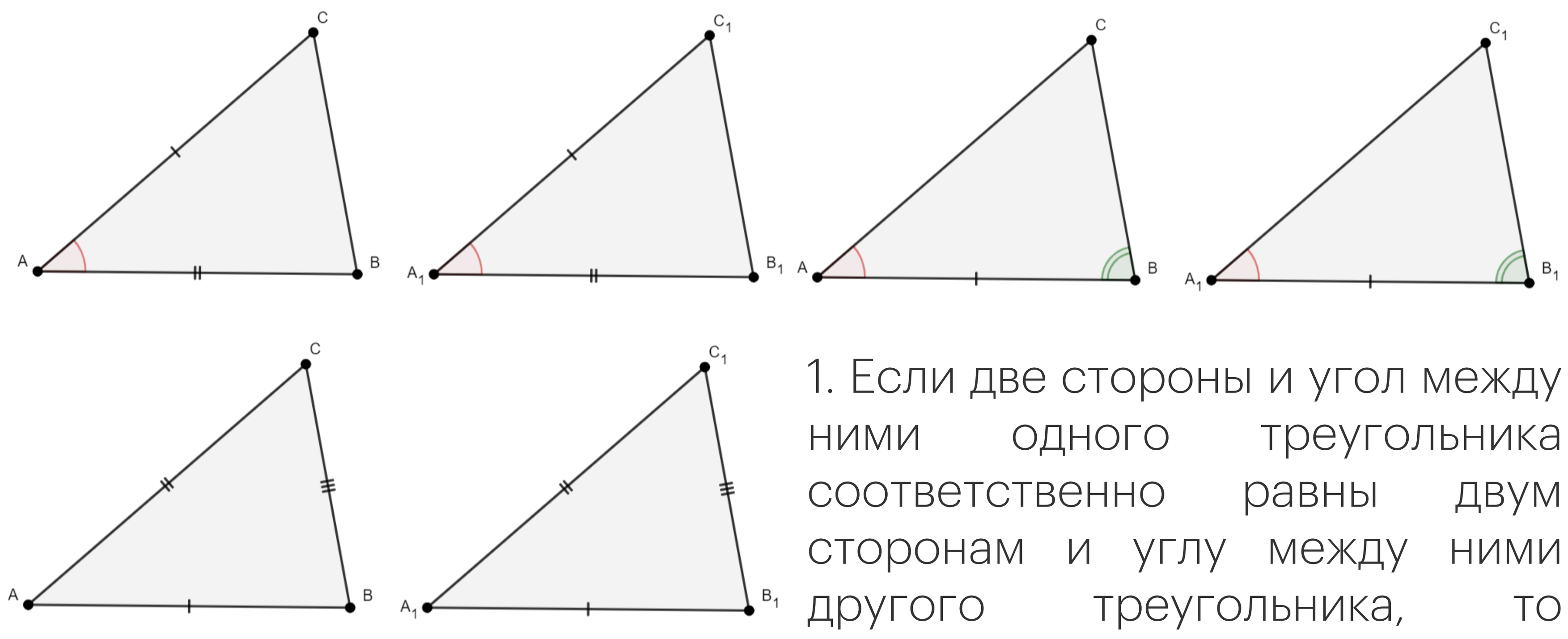


Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающиеся вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.




Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямы, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки.

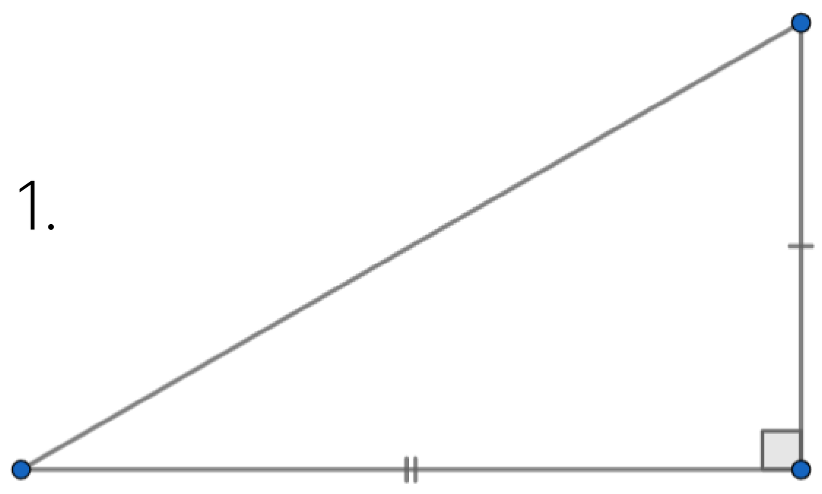
## Признаки равенства треугольников



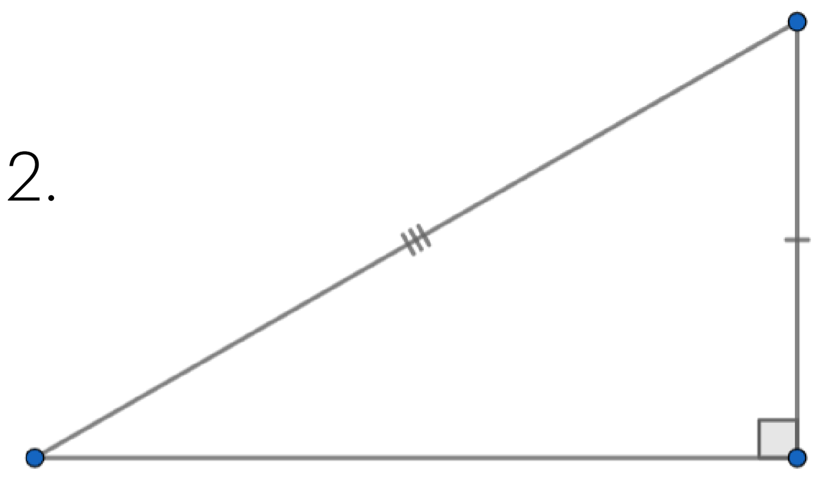
1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.
2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам второго треугольника, то треугольники равны.
3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого, то треугольники равны.

## Признаки равенства прямоугольных треугольников

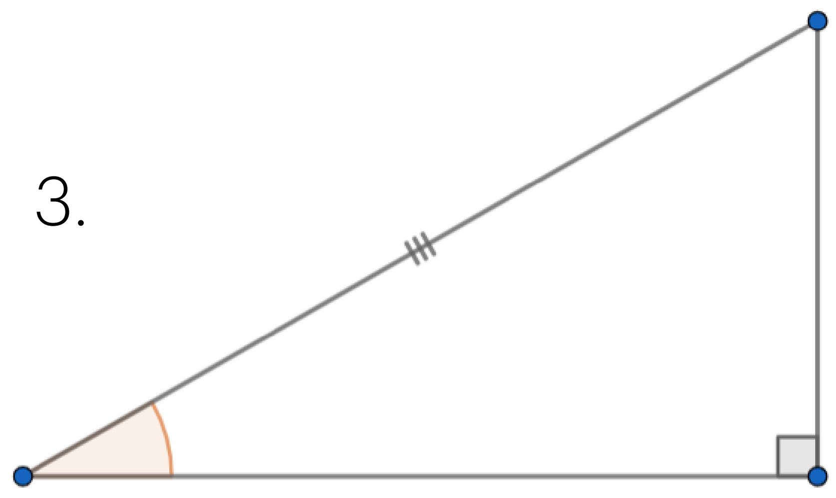
1.



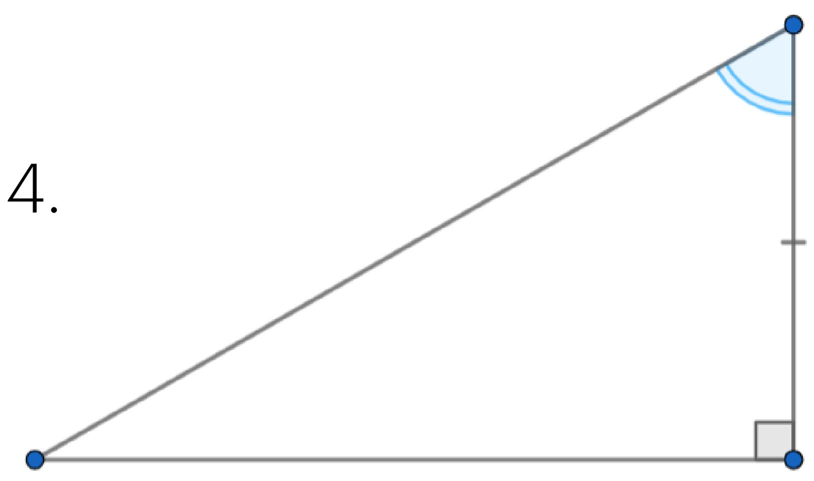
2.



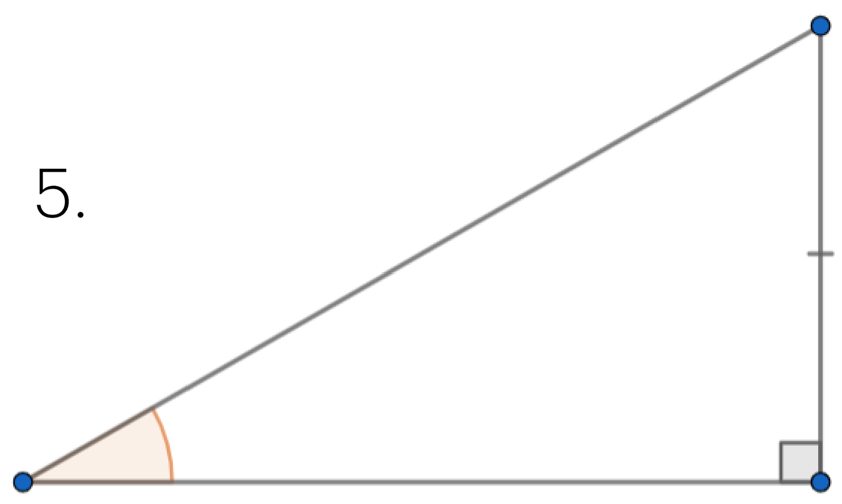
3.



4.

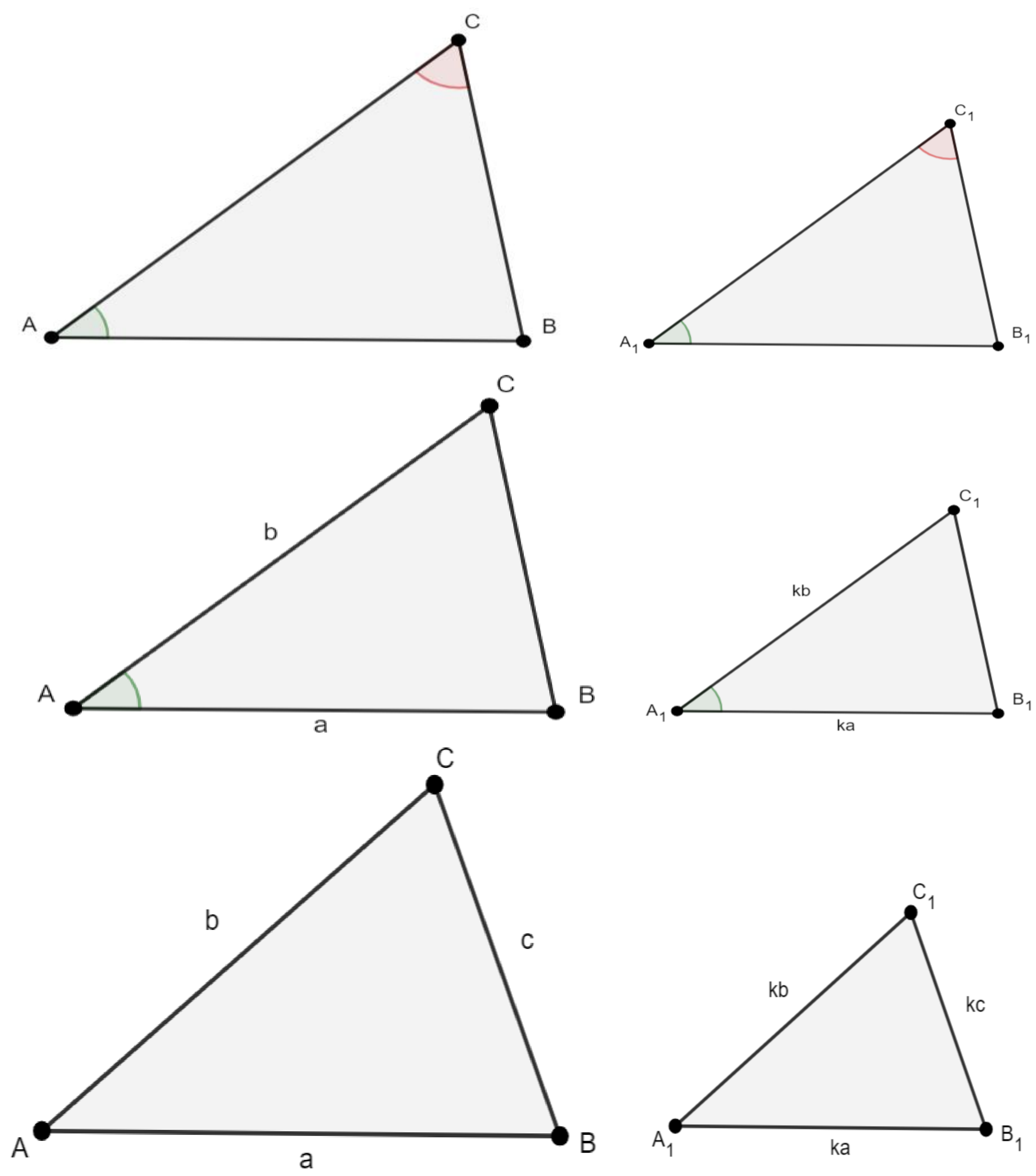


5.

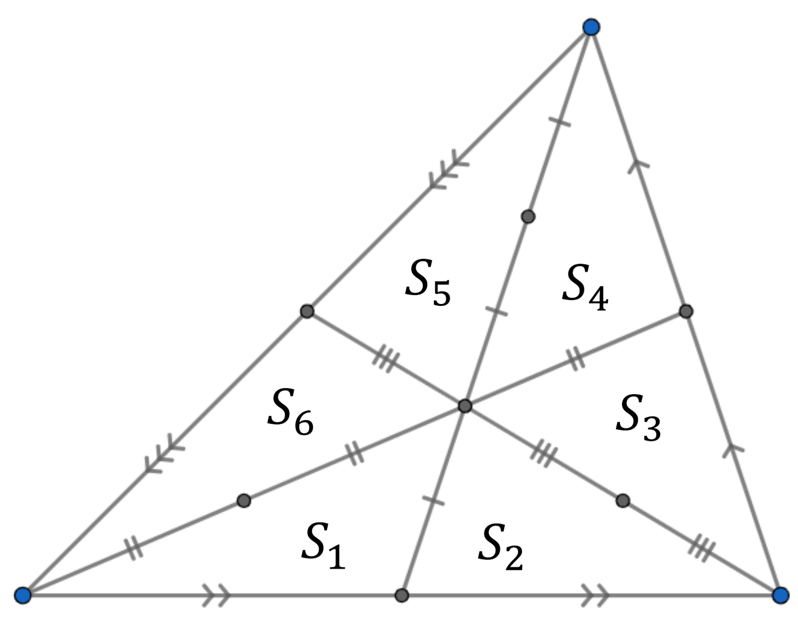


1. По двум катетам
2. По катету и гипотенузе
3. По гипотенузе и острому углу
4. По катету и прилежащему острому углу
5. По катету и противолежащему острому углу

## Признаки подобия треугольников

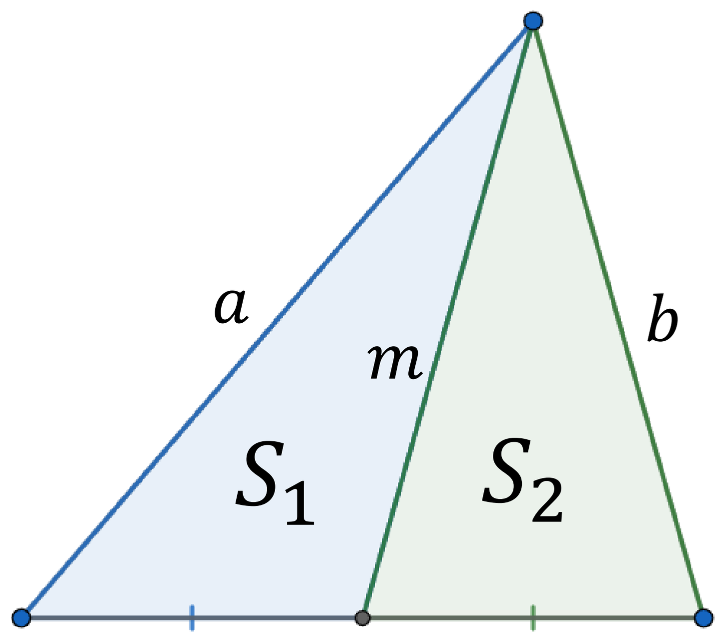


## Медиана треугольника

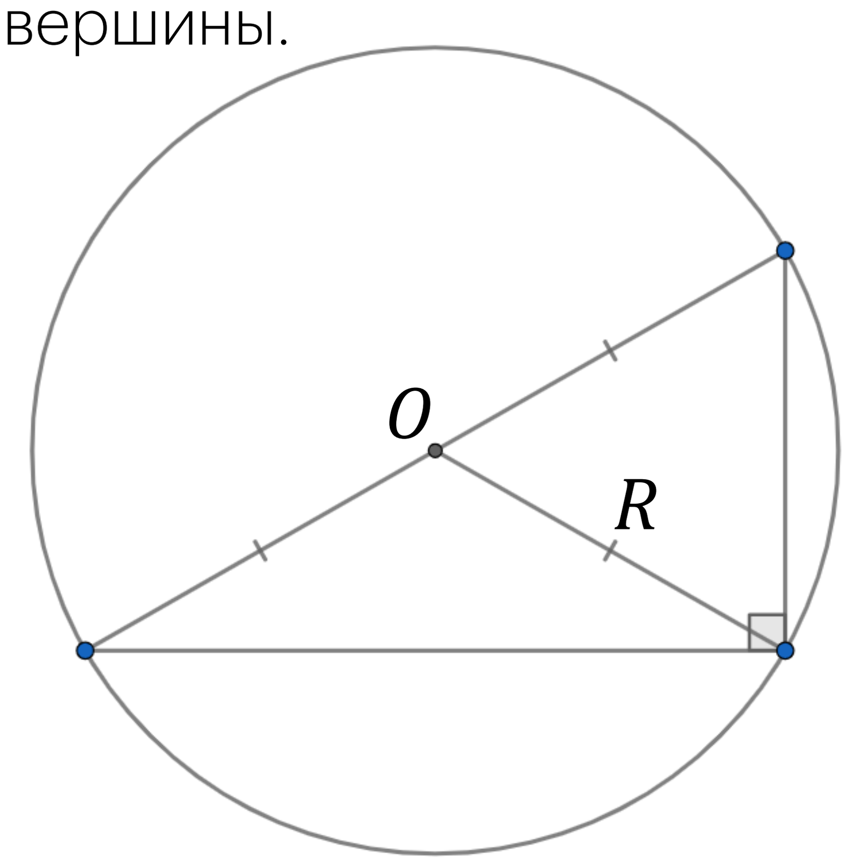



$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.




Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника. $S_1 = S_2$



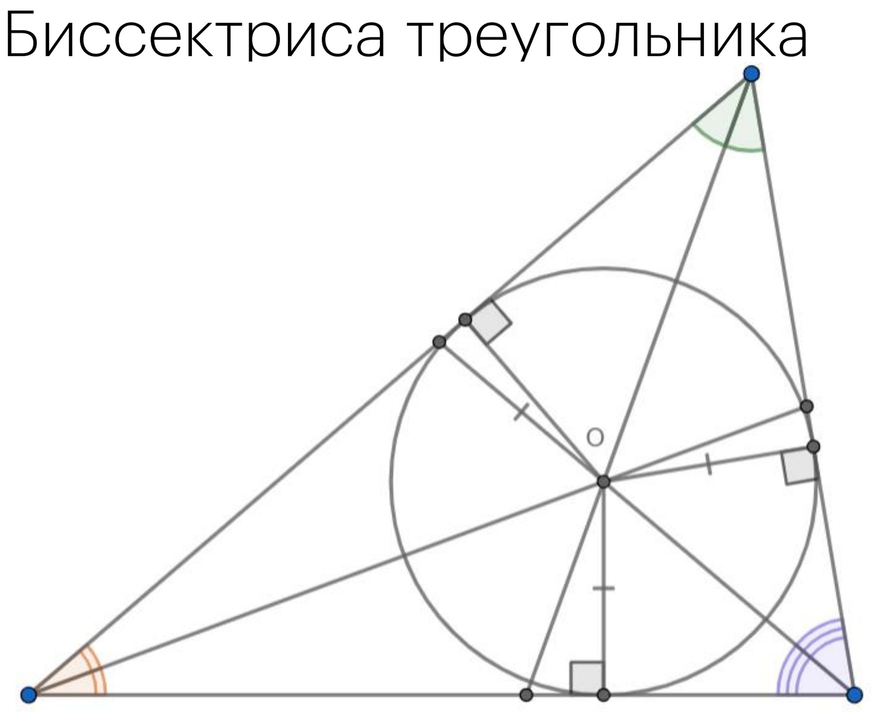

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Эта медиана равна радиусу описанной окружности.

Т. О – середина гипотенузы и центр описанной окружности.

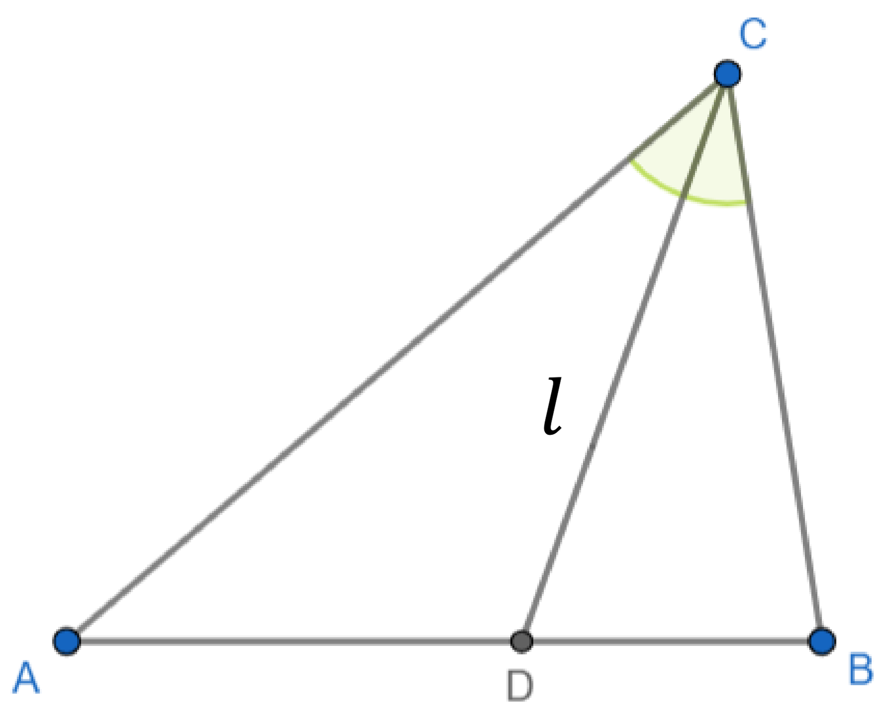
Длина медианы:

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

## Биссектриса треугольника



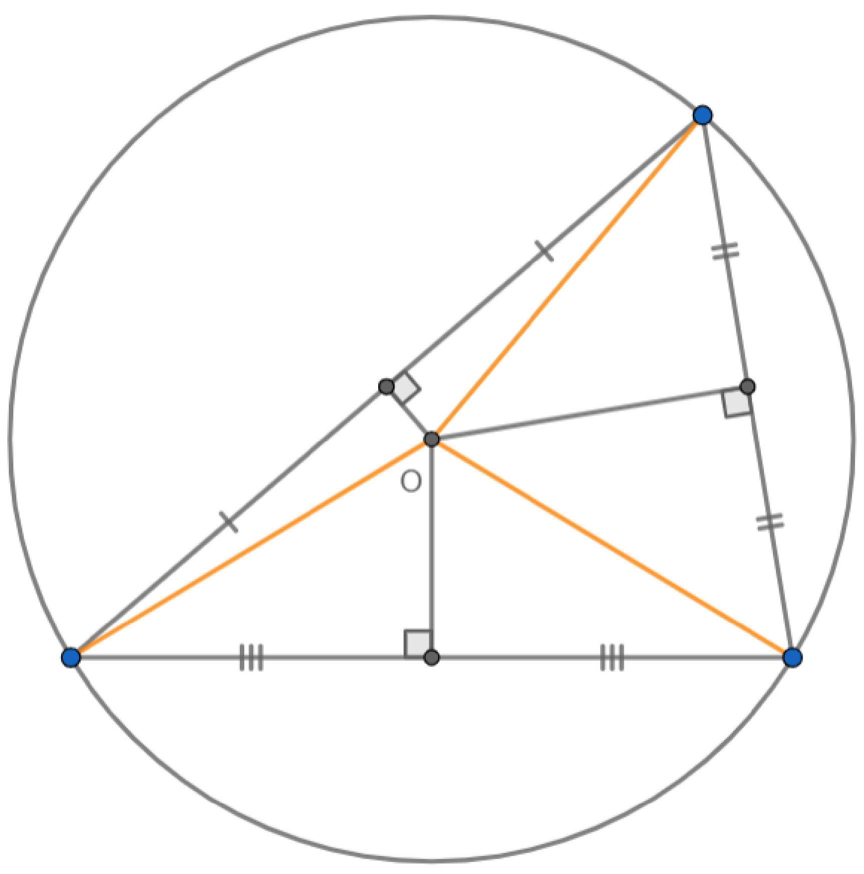

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – в центре вписанной окружности, инцентре треугольника

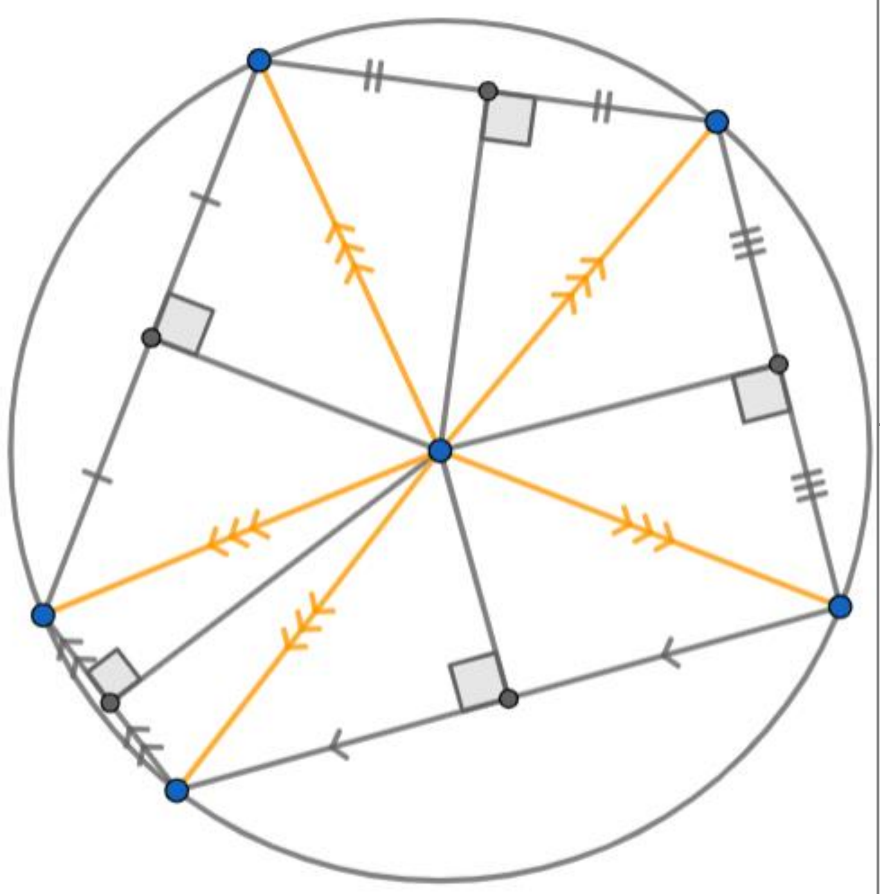



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$$

$$l = \sqrt{AC \cdot BC - AD \cdot DB}$$

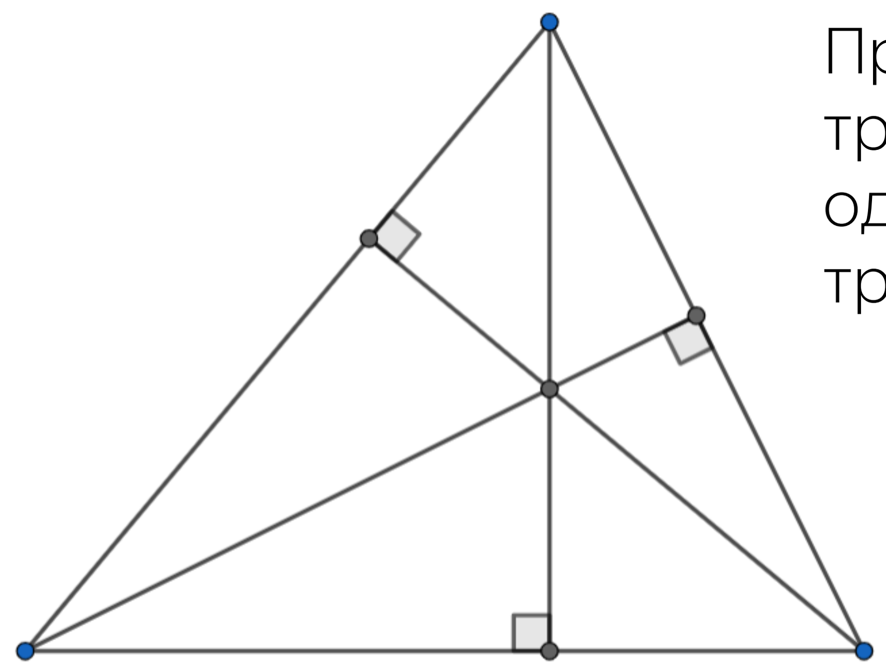
## Серединный перпендикуляр



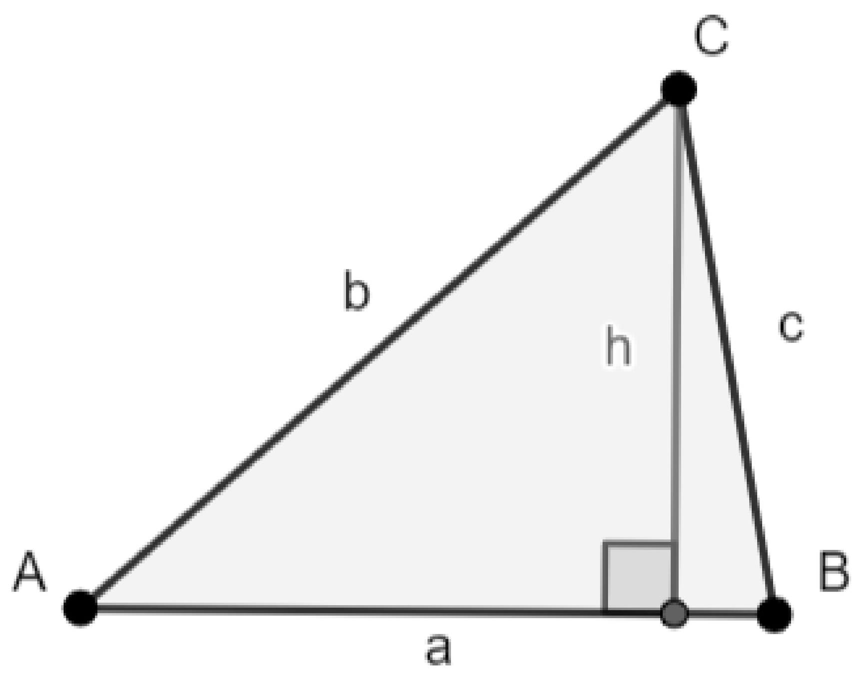
Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника (или другого многоугольника, для которого существует описанная окружность) пересекаются в одной точке — центре описанной окружности. У остроугольного треугольника эта точка лежит внутри, у тупоугольного — вне треугольника, у прямоугольного — на середине гипотенузы.

## Высота треугольника

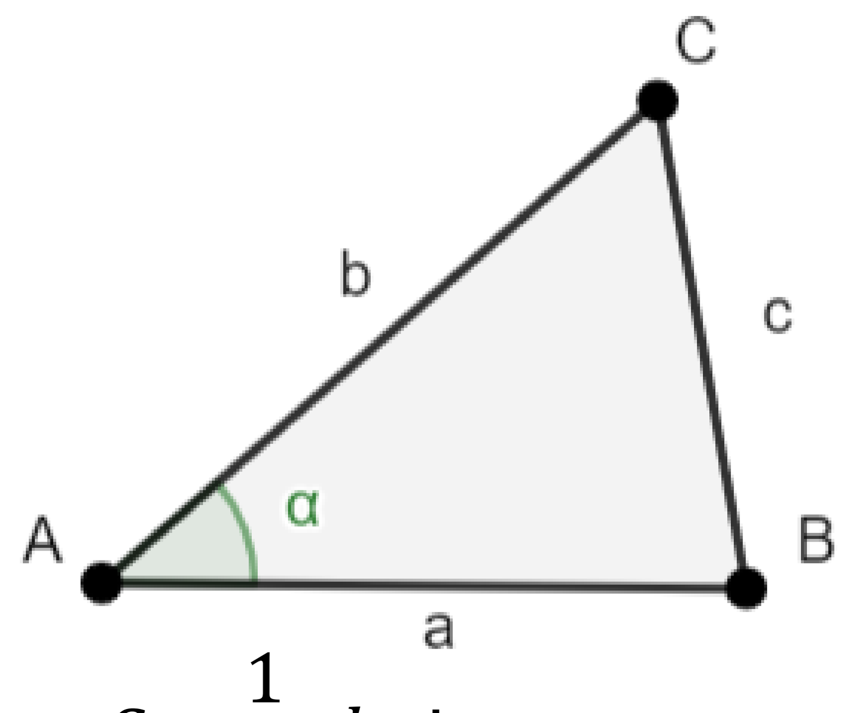


Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке, ортоцентре треугольника.

## Формулы площади треугольника



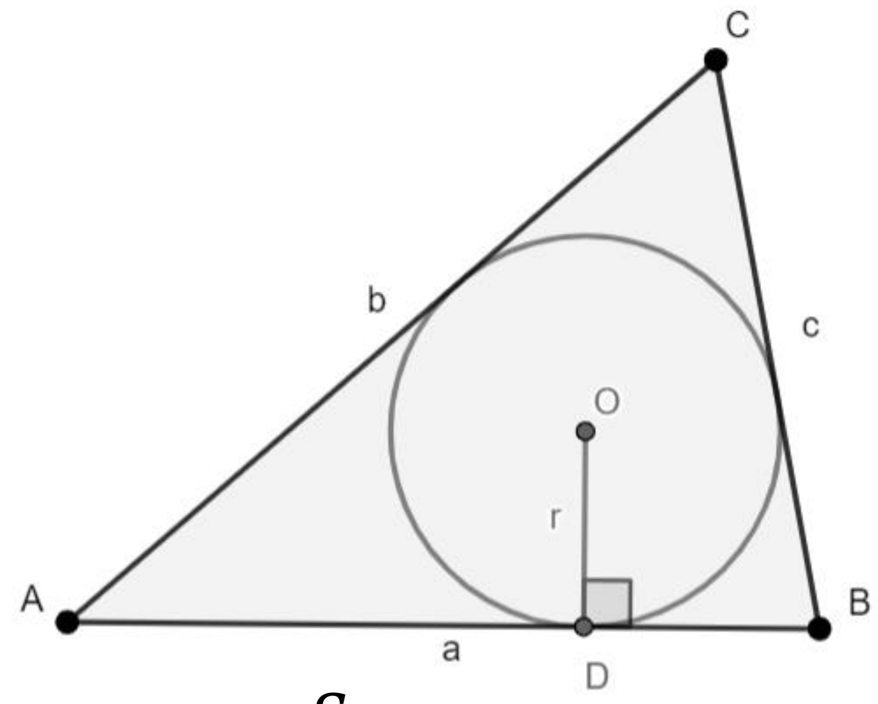

$$S = \frac{1}{2}ah$$



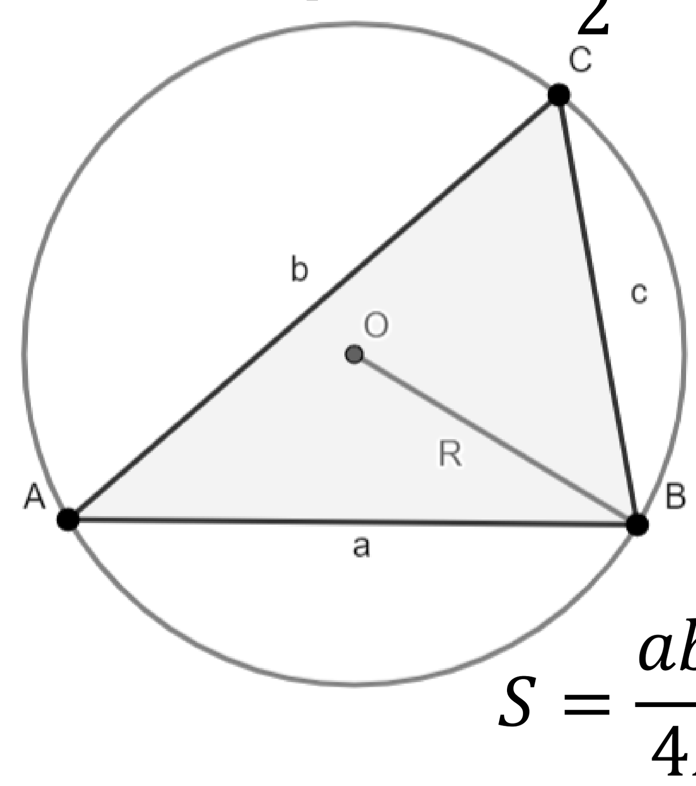

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ ,где $$p = \frac{a+b+c}{2}$$

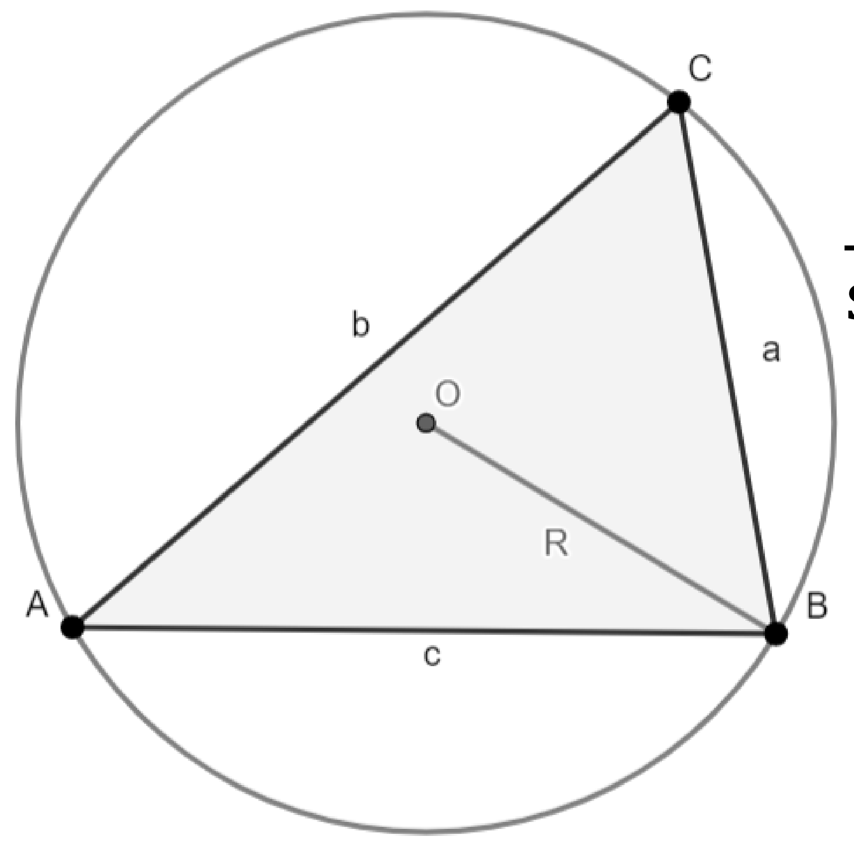



$$S = pr$$




$$S = \frac{abc}{4R}$$

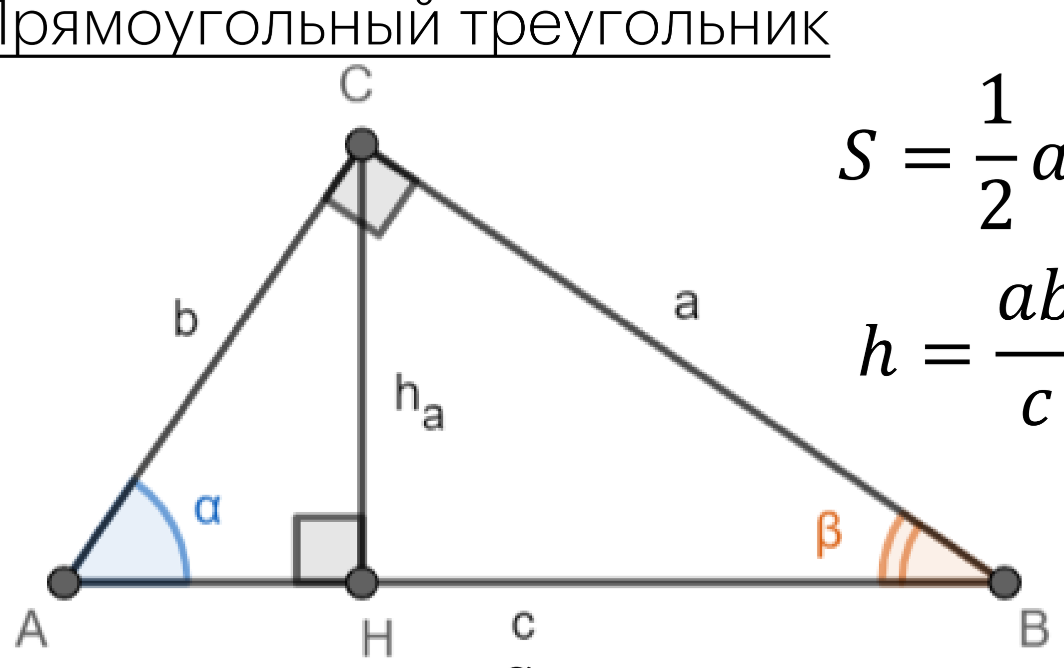
## Теоремы синусов и косинусов




$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

## Прямоугольный треугольник




$$S = \frac{1}{2}ab \quad c^2 = a^2 + b^2$$

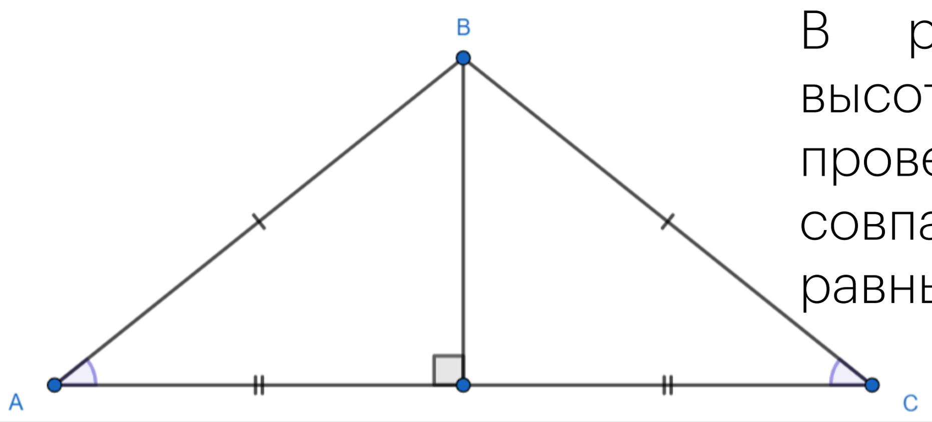
$$h = \frac{ab}{c} \quad h^2 = AH \cdot BH$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c} \quad \operatorname{tg}\alpha = ctg\,\beta = \frac{a}{b} \quad R = \frac{c}{2}$$

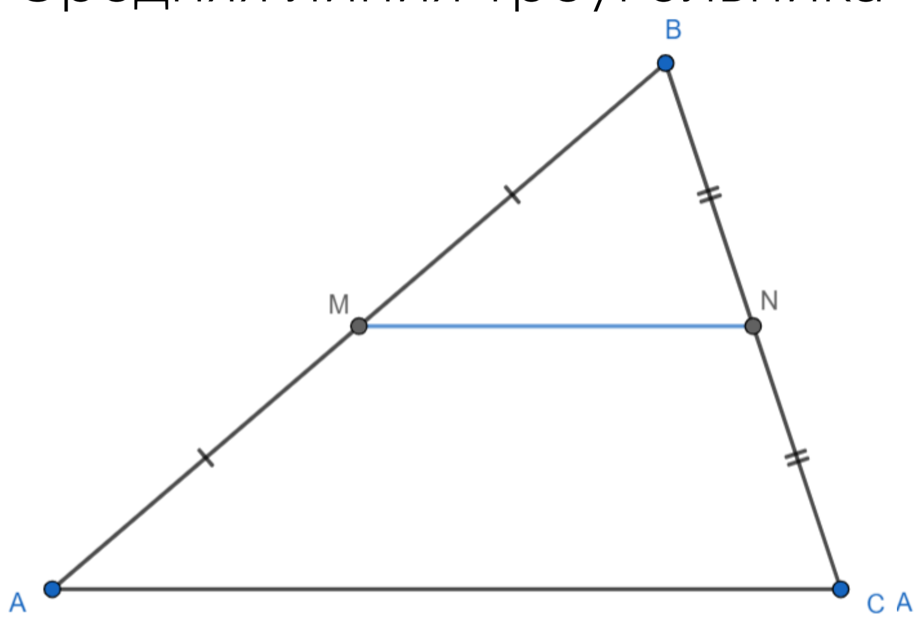
$$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{b}{c} \quad \operatorname{ctg}\alpha = tg\,\beta = \frac{b}{a}$$

## Равнобедренный треугольник

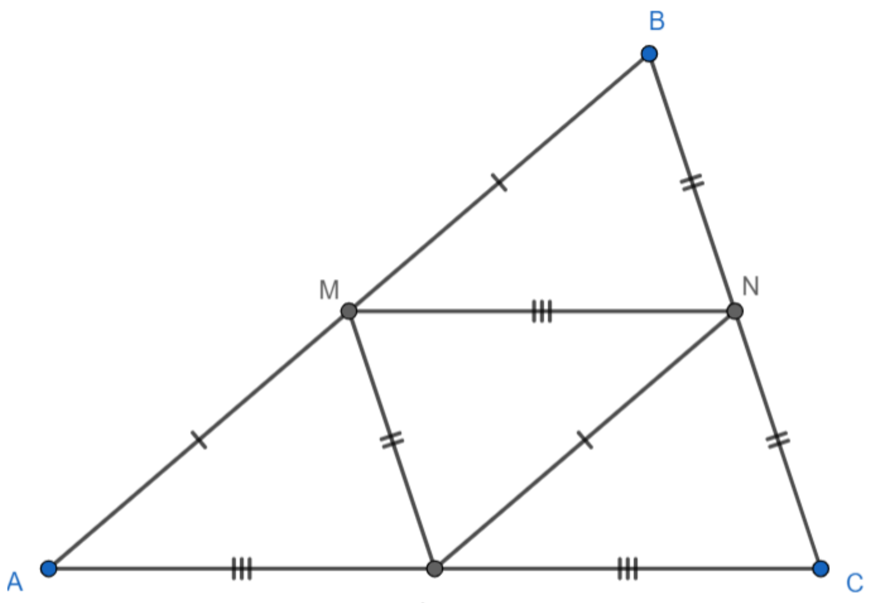


В равнобедренном треугольнике высота, биссектриса и медиана, проведённые к основанию совпадают. Углы при основании равны. $AB = BC, \angle A = \angle C$.

## Средняя линия треугольника

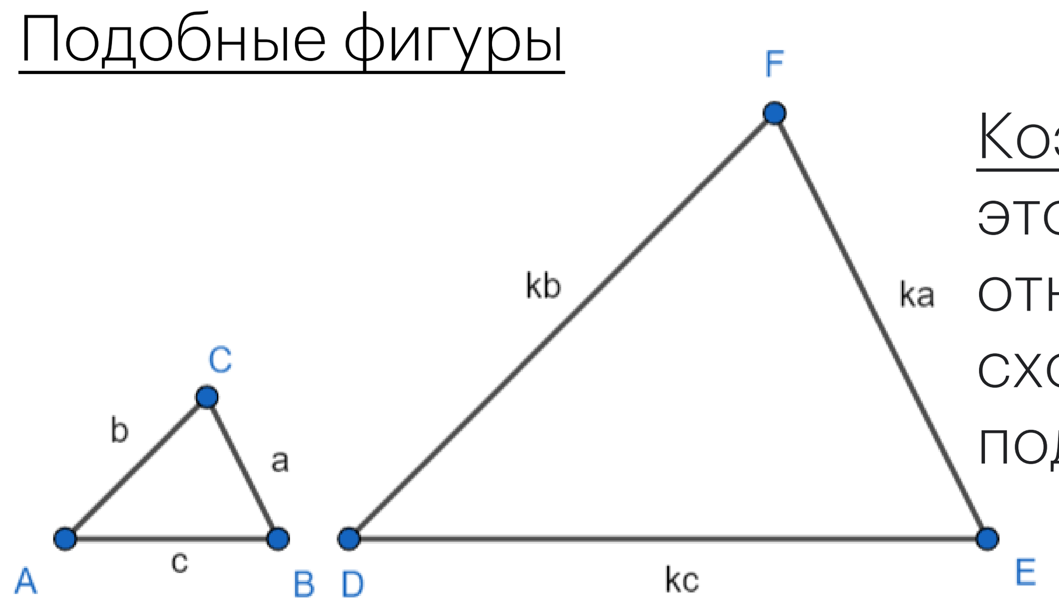


1. $AC \parallel MN$
2. $AC = 2MN$
3. $\Delta ABC \sim \Delta MBN, k = 2$



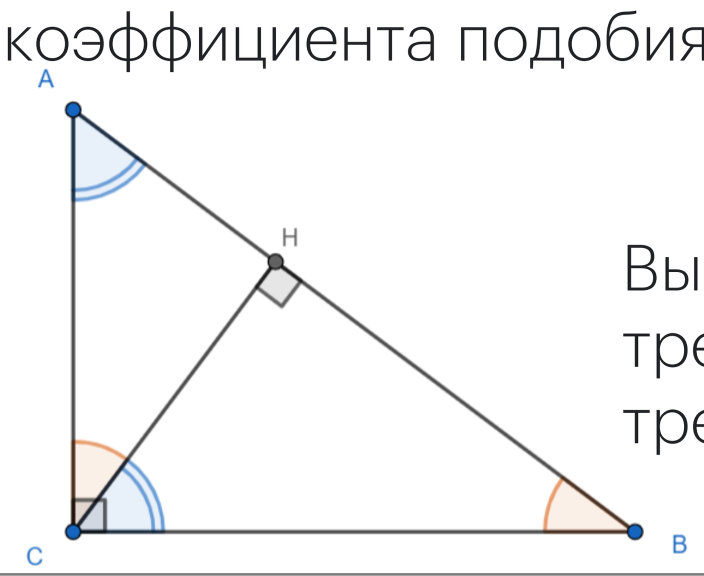
$\Delta AML = \Delta MBN = \Delta MNL = \Delta NCL$

## Подобные фигуры



Коэффициент подобия – это число, равное отношению сходственных сторон в подобных фигурах.

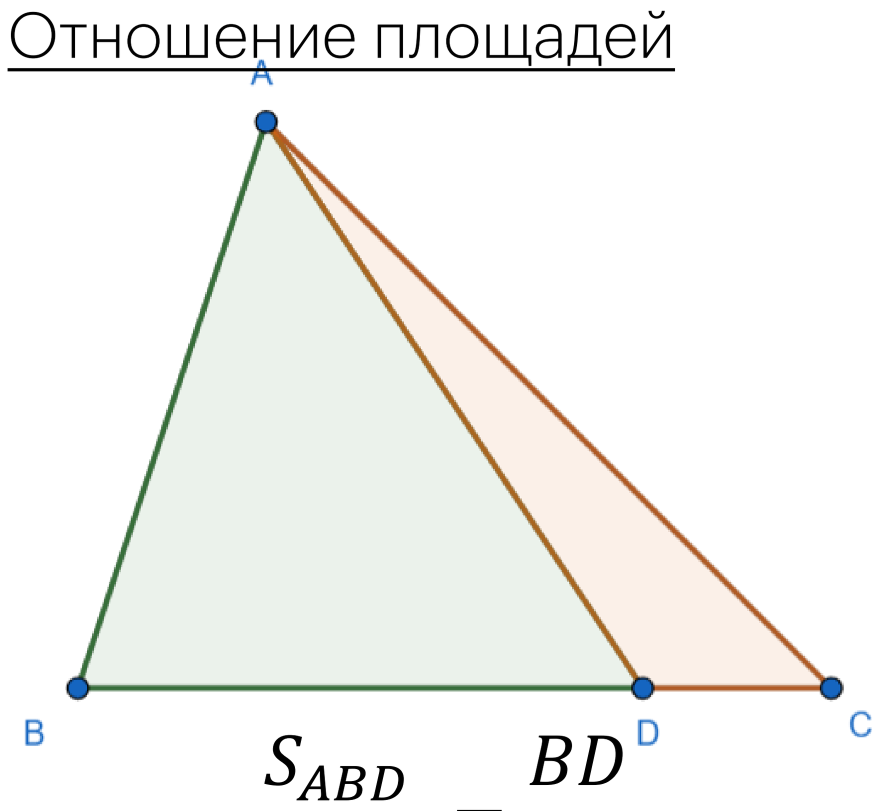
Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия. $S_{DEF} = k^2 \cdot S_{ABC}$



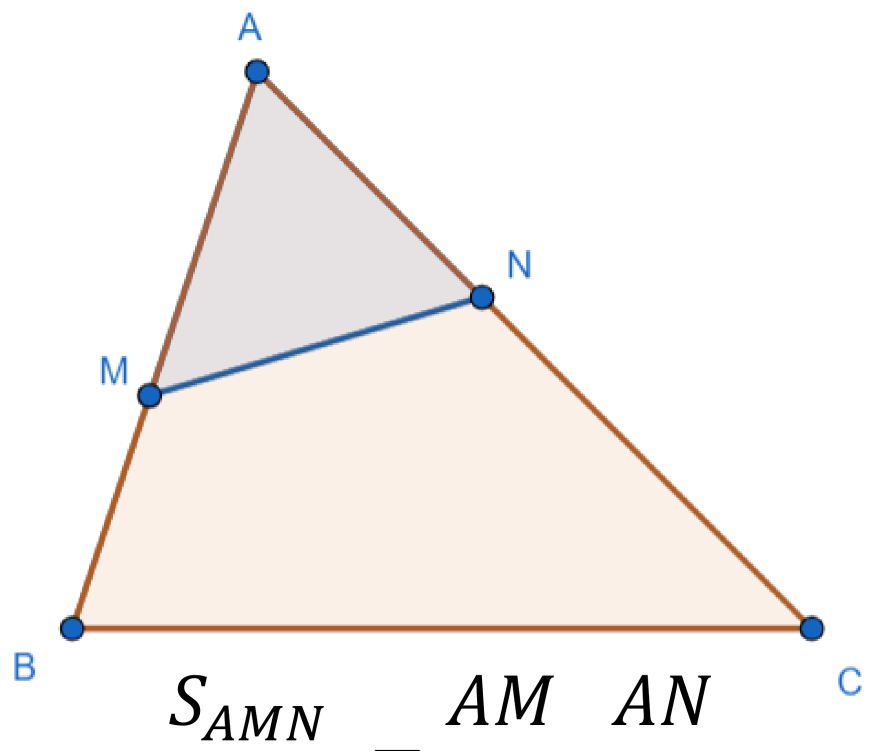
Высота из вершины прямого угла треугольника делит его на два треугольника, подобных исходному.

$$\Delta ABC \sim \Delta AHC \sim \Delta BCH$$

## Отношение площадей

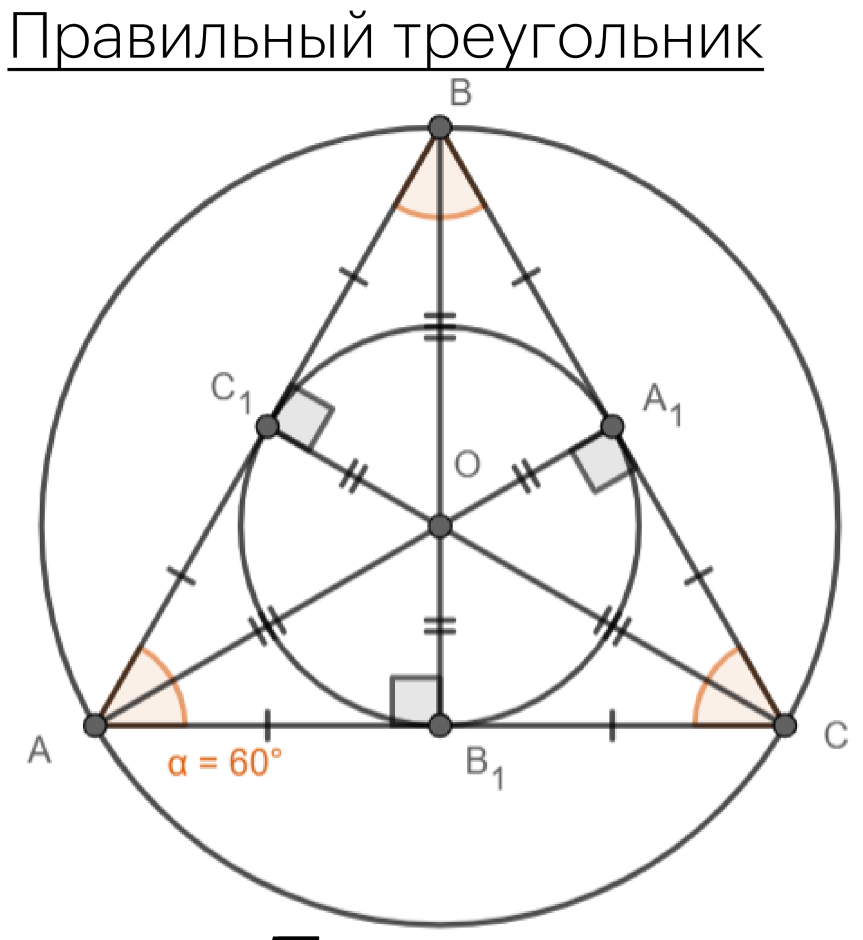


$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC}$$



$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}$$

## Правильный треугольник

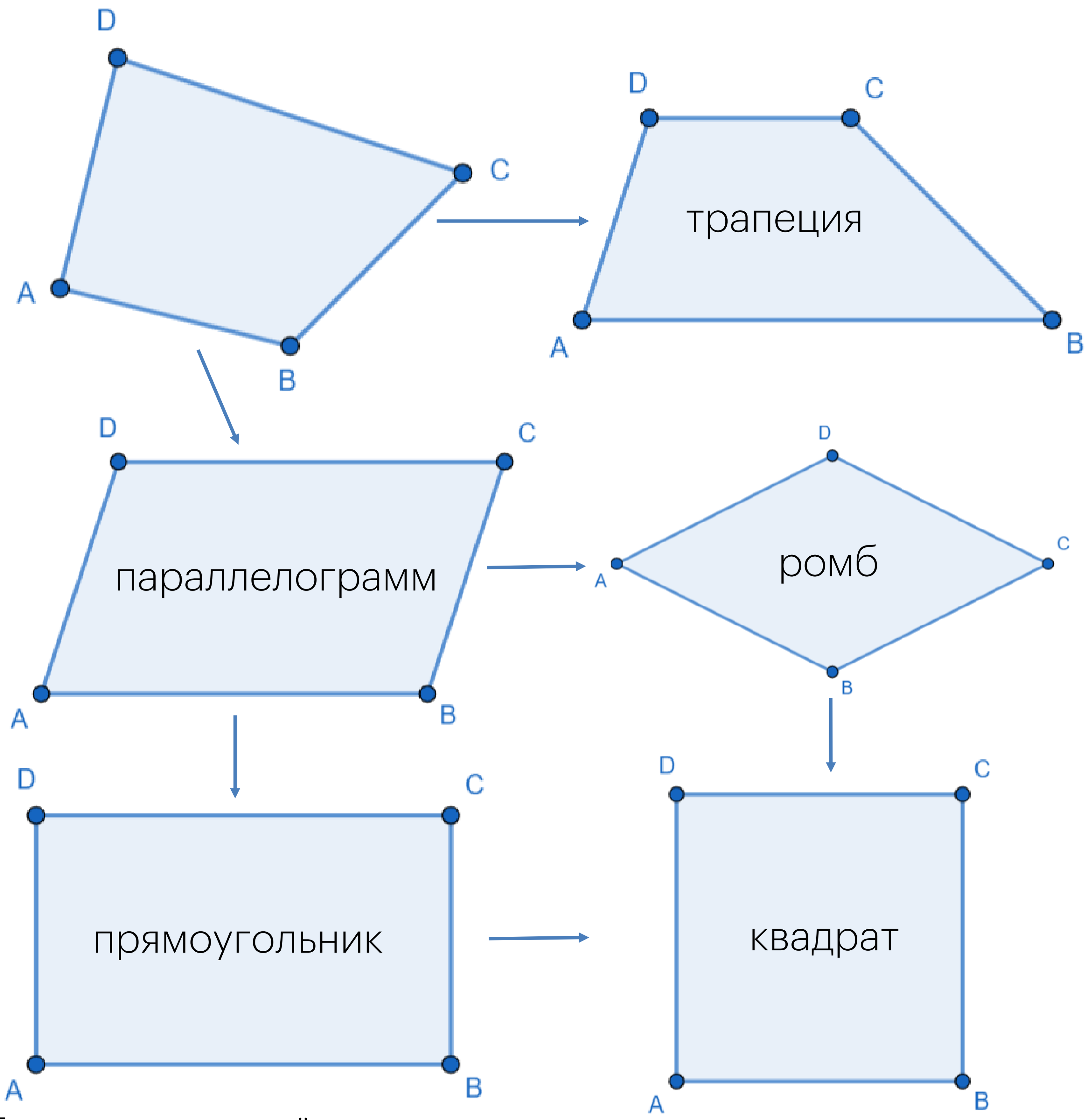


В правильном треугольнике все стороны равны. Все углы равны 60°. Медианы, высоты, биссектрисы, серединные перпендикуляры совпадают. Центры вписанной и описанной окружности совпадают. Пусть $AB = a$.

$$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \quad R = 2r = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

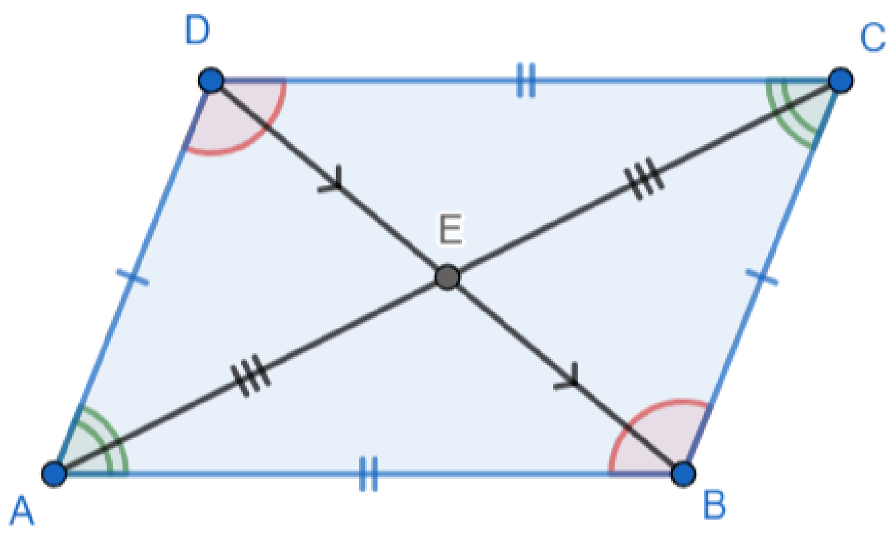
## Четырёхугольники. Разновидности. Общие сведения

Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.



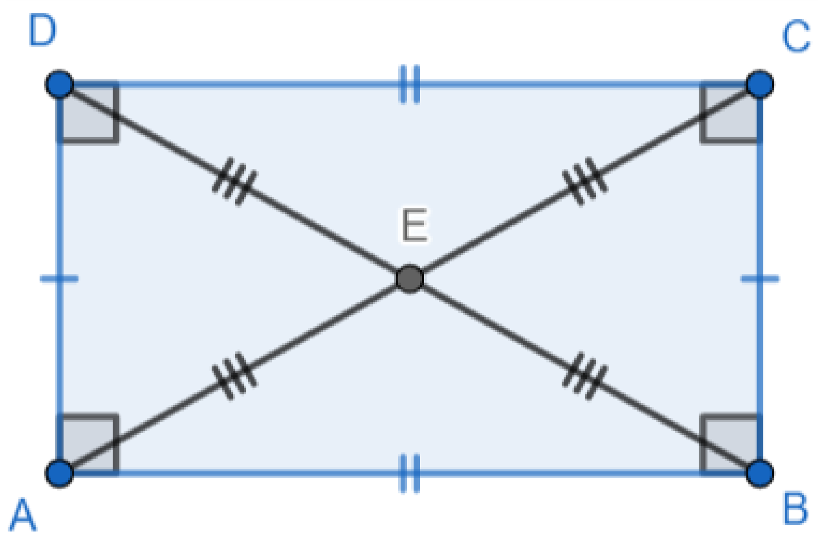

Трапеция — четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны;
Параллелограмм — четырёхугольник, у которого все противоположные стороны попарно равны и параллельны;
Прямоугольник — четырёхугольник, у которого все углы прямые;
Ромб — четырёхугольник, у которого все стороны равны;
Квадрат — четырёхугольник, у которого все углы прямые и все стороны равны;

## Свойства и признаки параллелограмма



1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.
2. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.
3. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.
5. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.
6. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.
7. Если диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

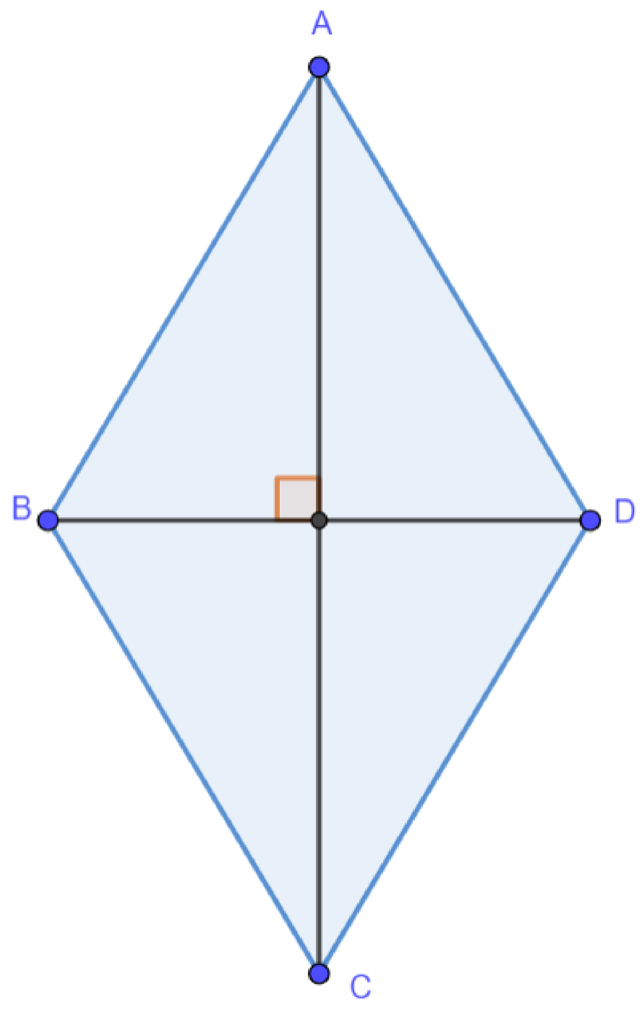
## Свойства и признаки прямоугольника



Прямоугольник является параллелограммом у которого хотя бы один угол прямой и поэтому обладает всеми свойствами параллелограмма.

1. Диагонали прямоугольника равны.
2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм - прямоугольник.
3. Если у выпуклого четырёхугольника все углы прямые, то этот четырёхугольник - прямоугольник

## Свойства и признаки ромба



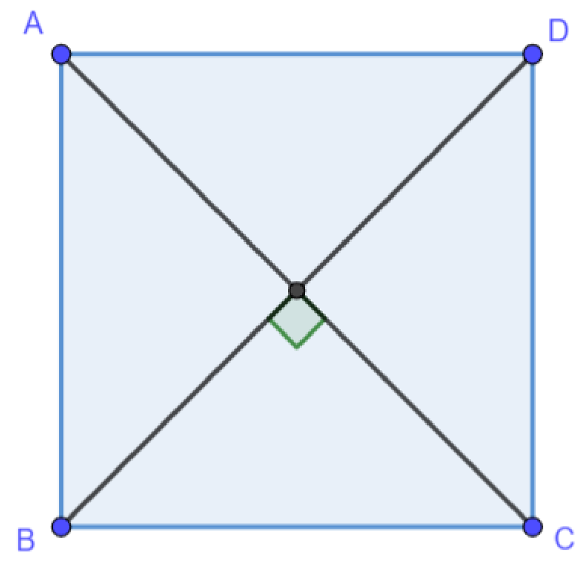

Свойства:

1. Все свойства параллелограмма.
2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
3. Диагонали ромба являются биссектрисами углов.
4. В ромб всегда можно вписать окружность.

Признаки:

1. Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.
2. Если в параллелограмме диагонали являются биссектрисами углов, то этот параллелограмм — ромб.

## Свойства и признаки квадрата



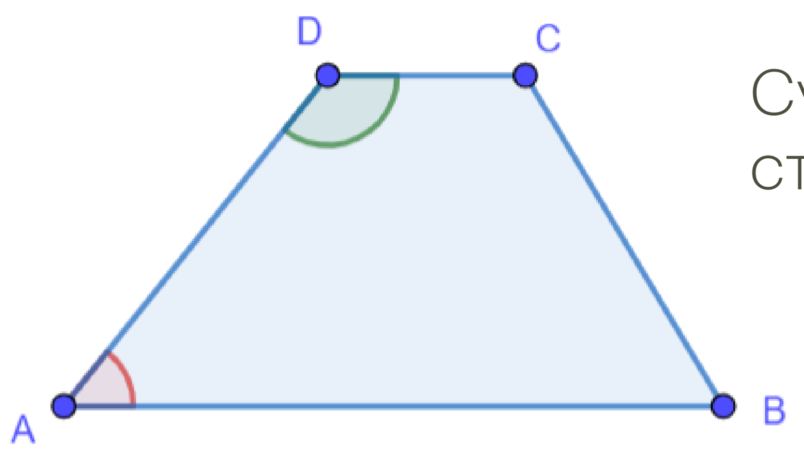

Свойства:

1. Все свойства прямоугольника и ромба.
2. Диагонали равны

Признаки:

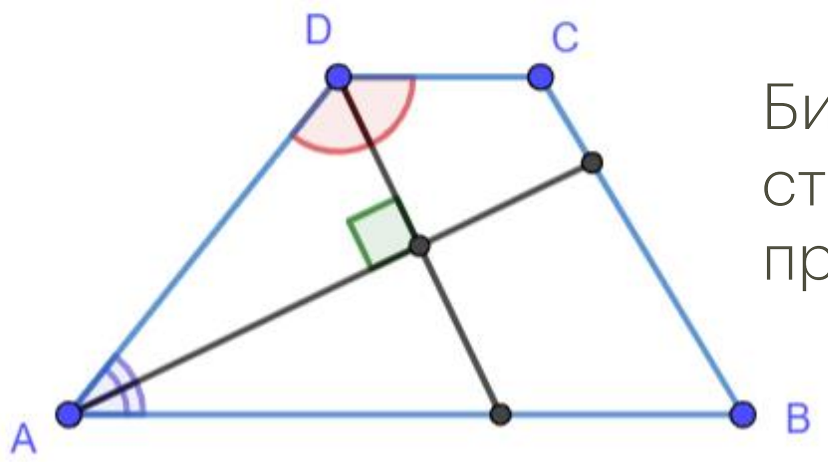
1. Если две смежные стороны прямоугольника равны, то этот прямоугольник является квадратом.
2. Если диагонали прямоугольника перпендикулярны, то этот прямоугольник является квадратом.
3. Если один из углов ромба прямой, то этот ромб является квадратом.
4. Если диагонали ромба равны, то этот ромб является квадратом.

## Трапеция

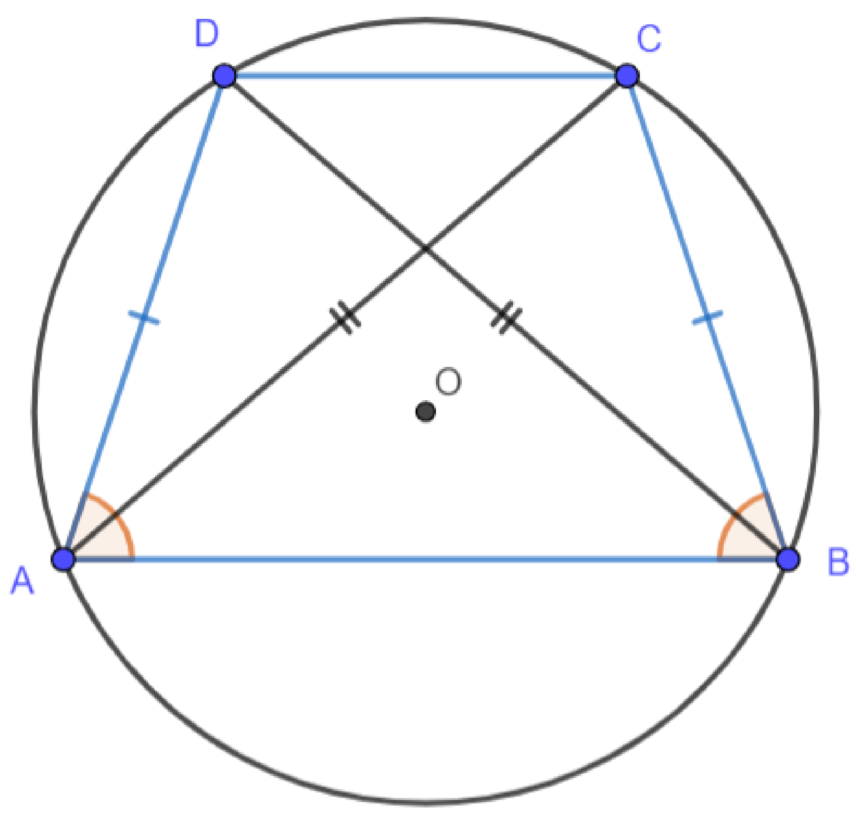



Сумма углов при боковой стороне равна 180 градусам.

$$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C = 180°$$




Биссектрисы углов при боковой стороне пересекаются под прямым углом

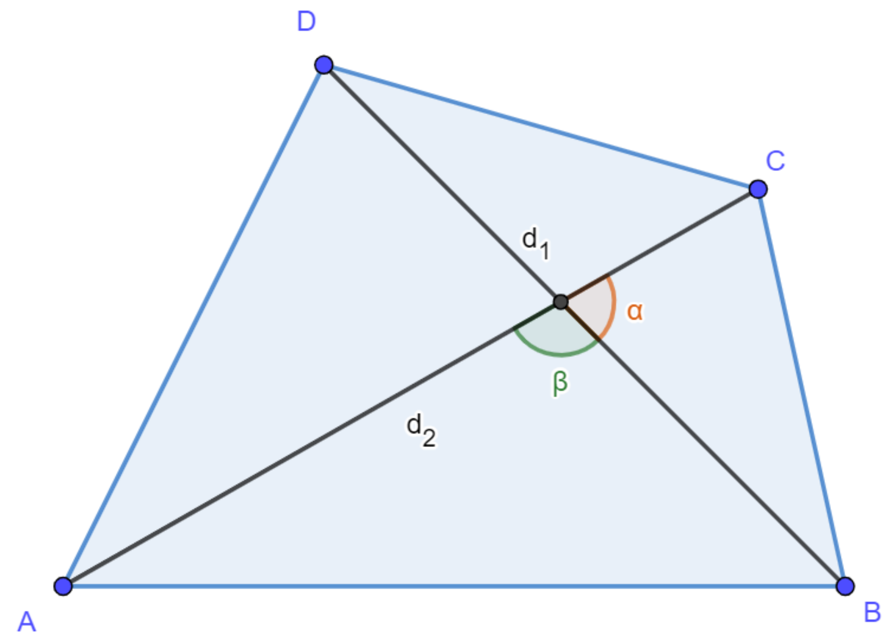


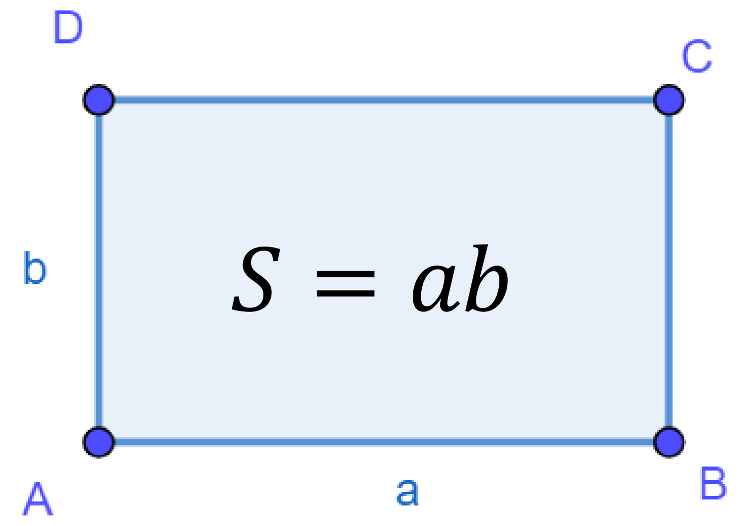

Равнобедренная трапеция – трапеция, у которой боковые стороны равны.

У равнобедренной трапеции равны углы при основании, а также диагонали.

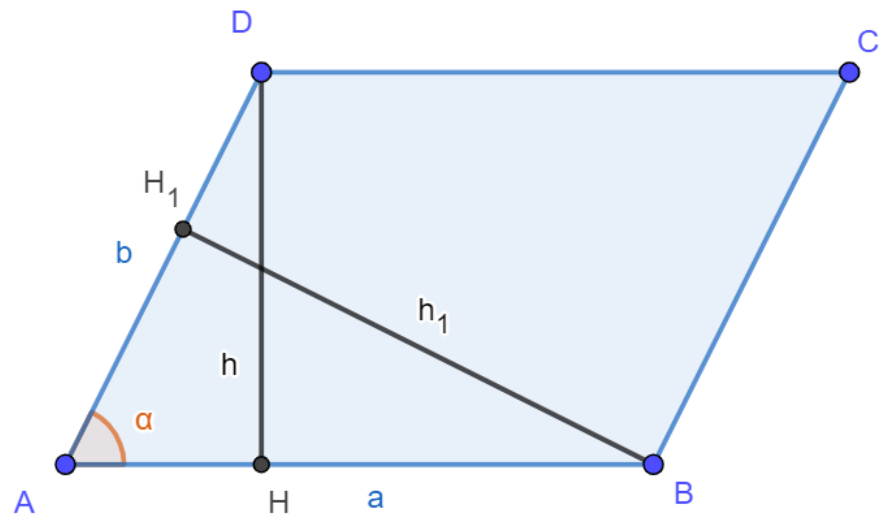
Только равнобедренную трапецию можно вписать в окружность.

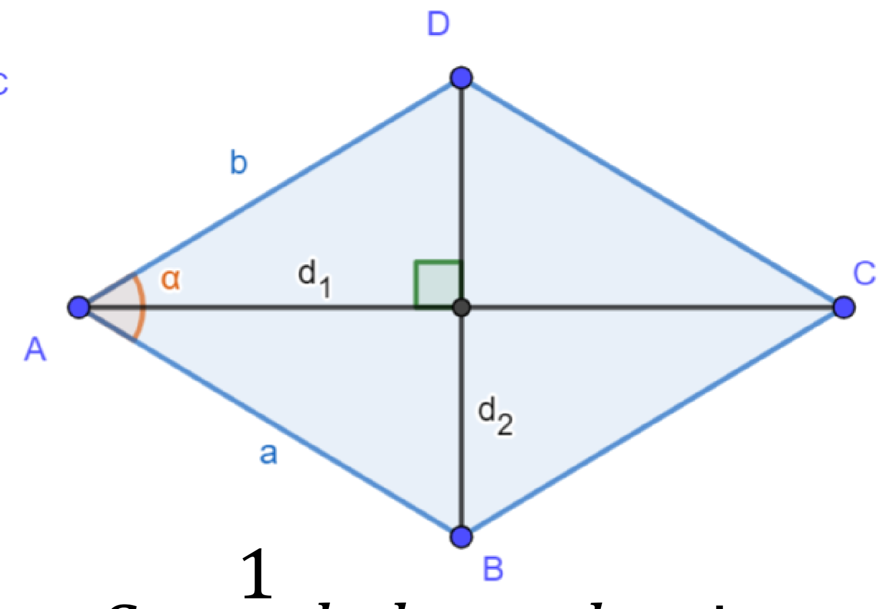
## Формулы площади четырёхугольников



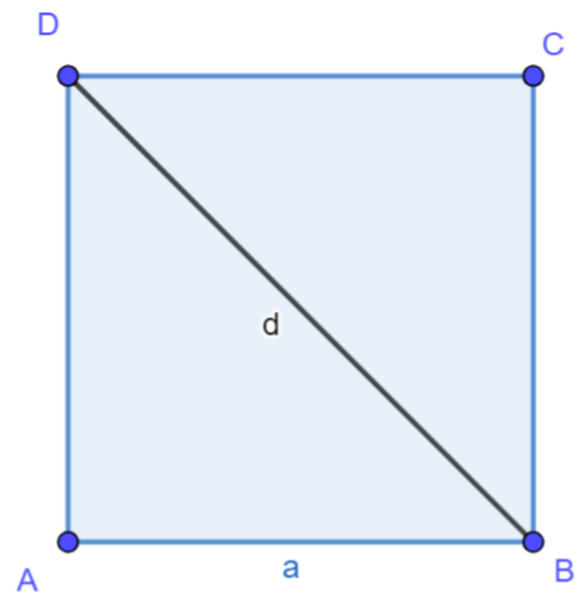



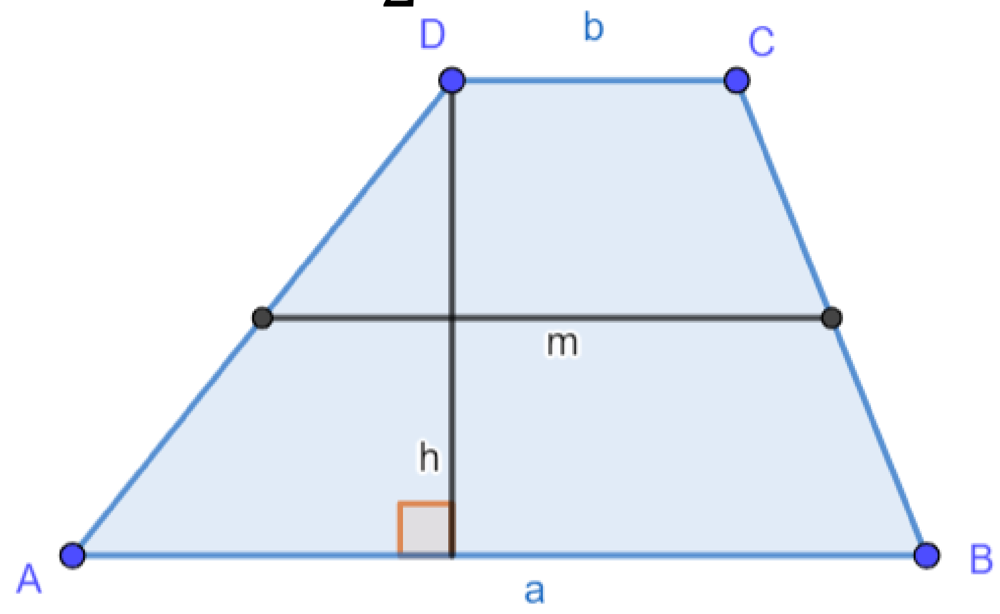

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\beta$$



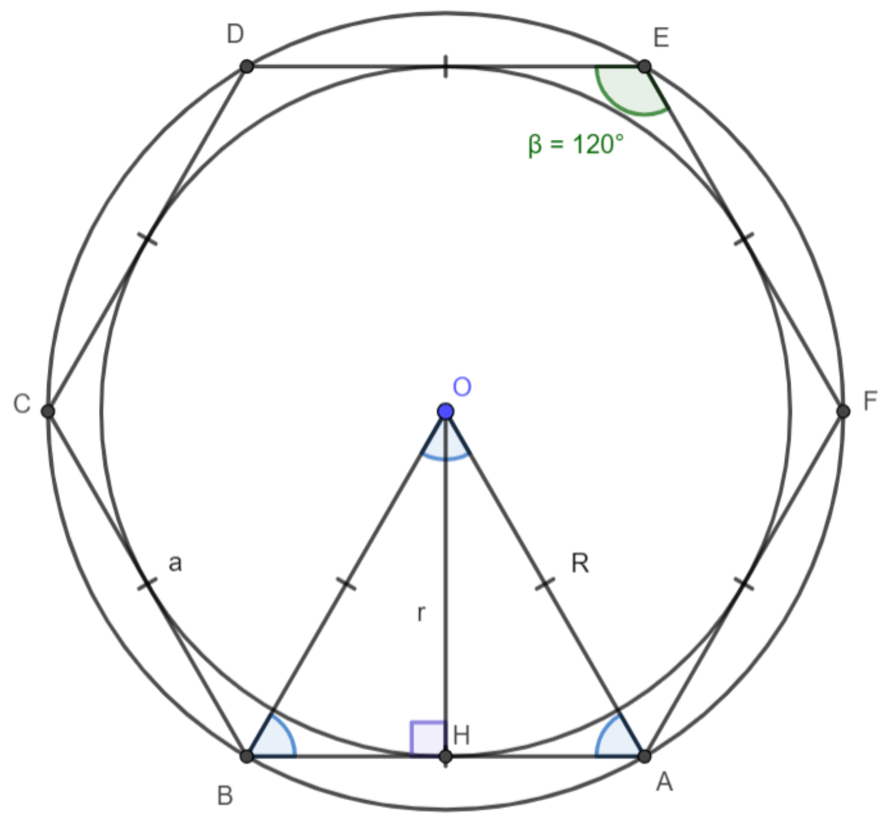

$$S = ah = bh_1 = ab \cdot \sin\alpha \qquad S = \frac{1}{2} d_1 d_2 = ab \cdot \sin\alpha$$




$$S = a^2 = \frac{d^2}{2} \qquad S = \frac{a+b}{2} h = mh$$

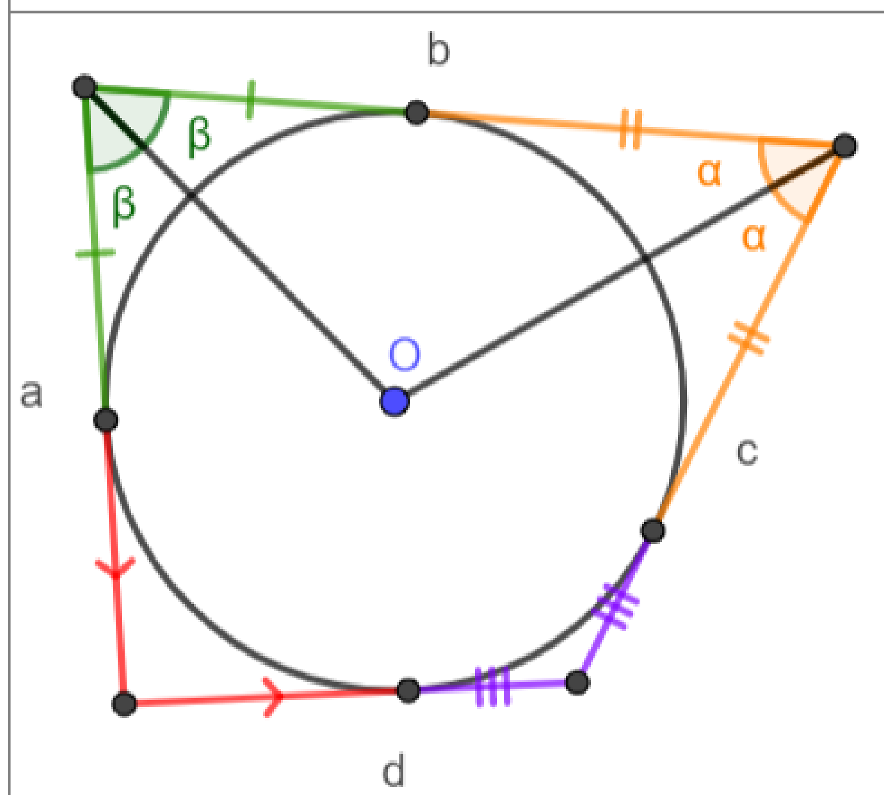
## Правильный шестиугольник




$$S = 6 \cdot S_{ABO} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$R = a, \qquad r = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

Правильный шестиугольник состоит из шести правильных треугольников.



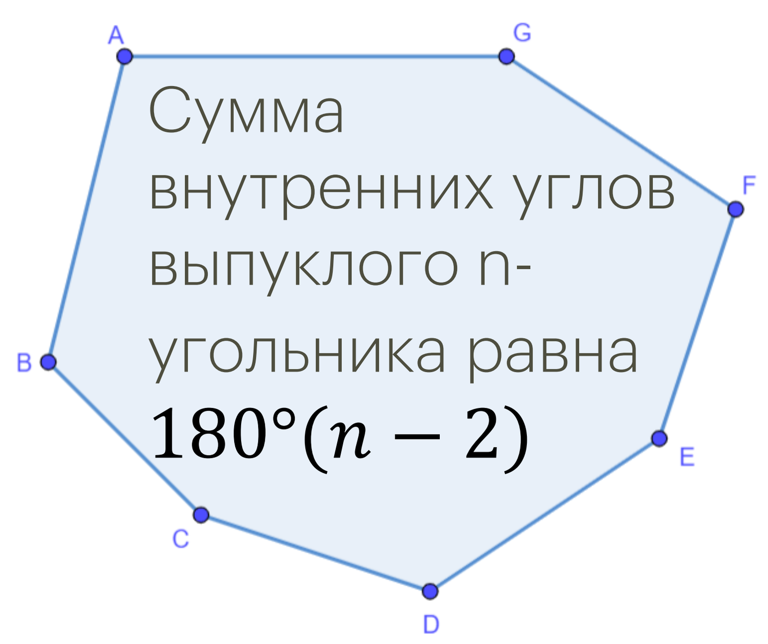

В четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны.

$$a + c = b + d$$

Центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис.

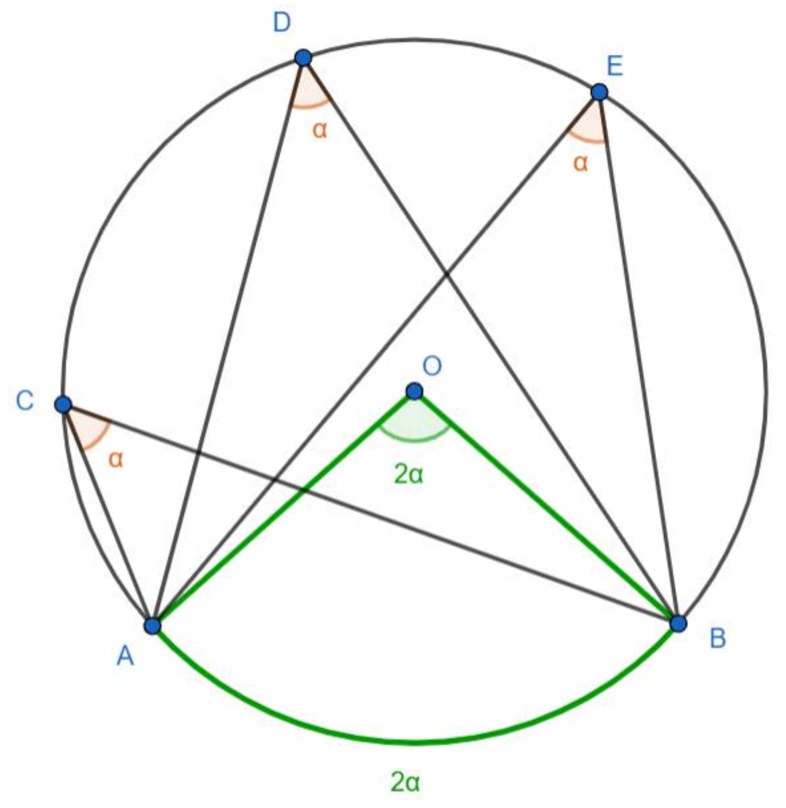
$$S = p \cdot r$$

,где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

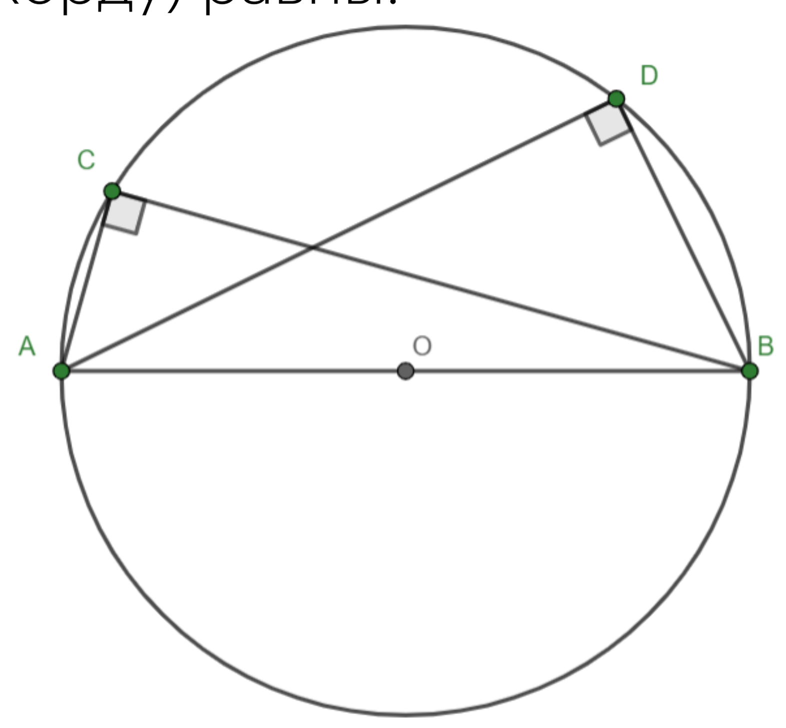



Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$

## Центральный и вписанный углы

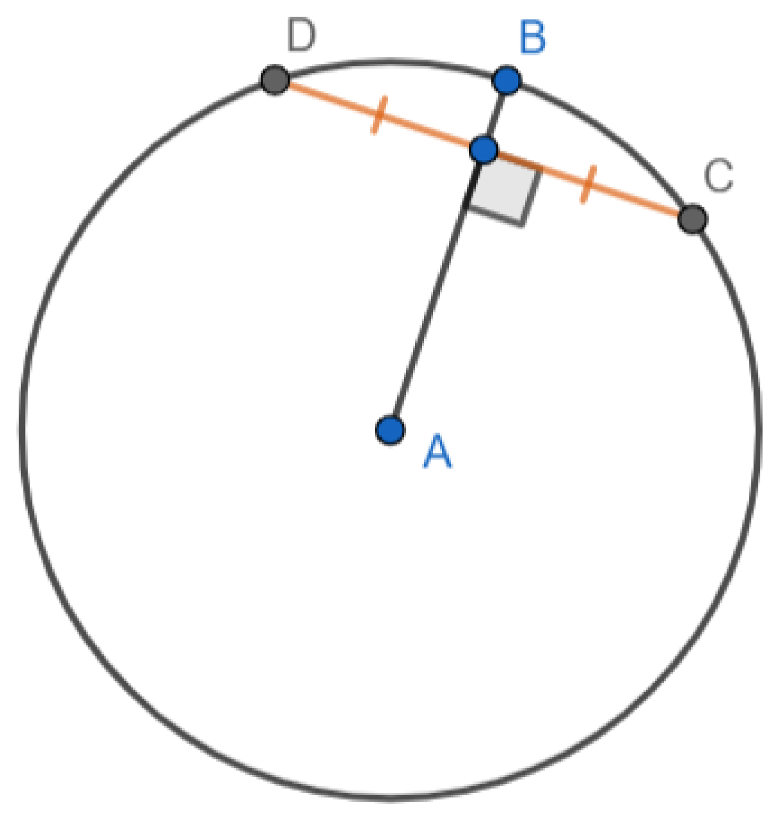



Центральный угол вдвое больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу (хорду) равны.



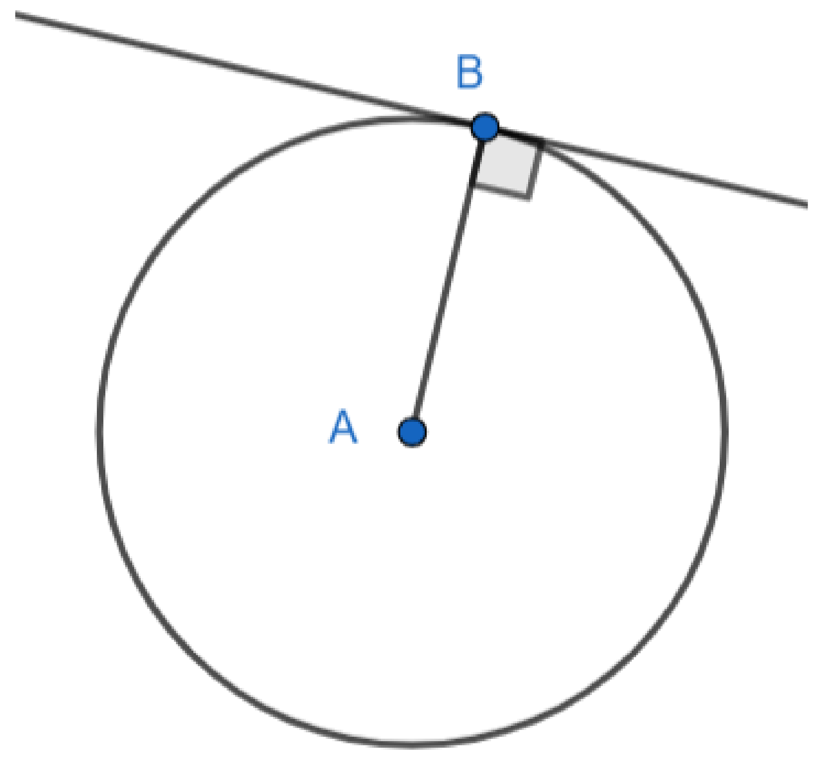

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой.

## Радиус и хорда




Если радиус перпендикулярен хорде, то точкой пересечения он делит её пополам. Если радиус делит хорду пополам, то он ей перпендикулярен.

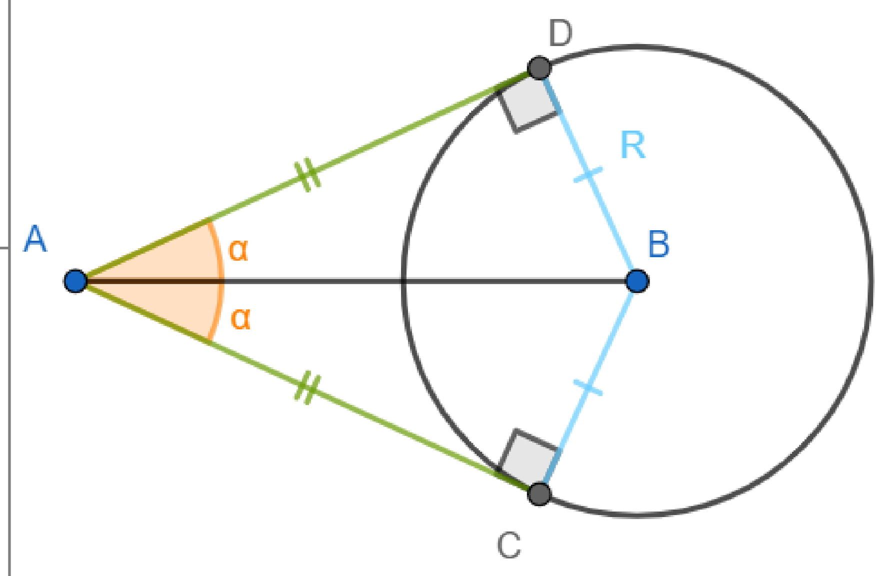
## Касательная и радиус




Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

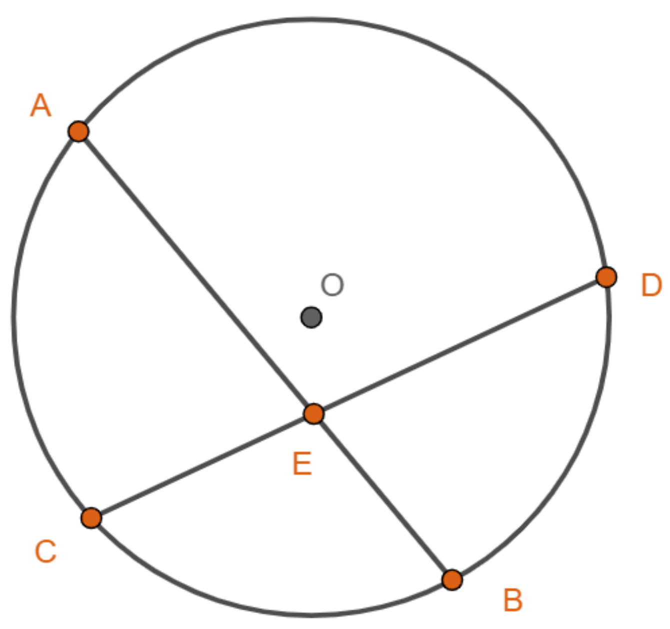
Перпендикуляр к радиусу в его конце, лежащем на окружности, является касательной к этой окружности.

## Касательные к окружности



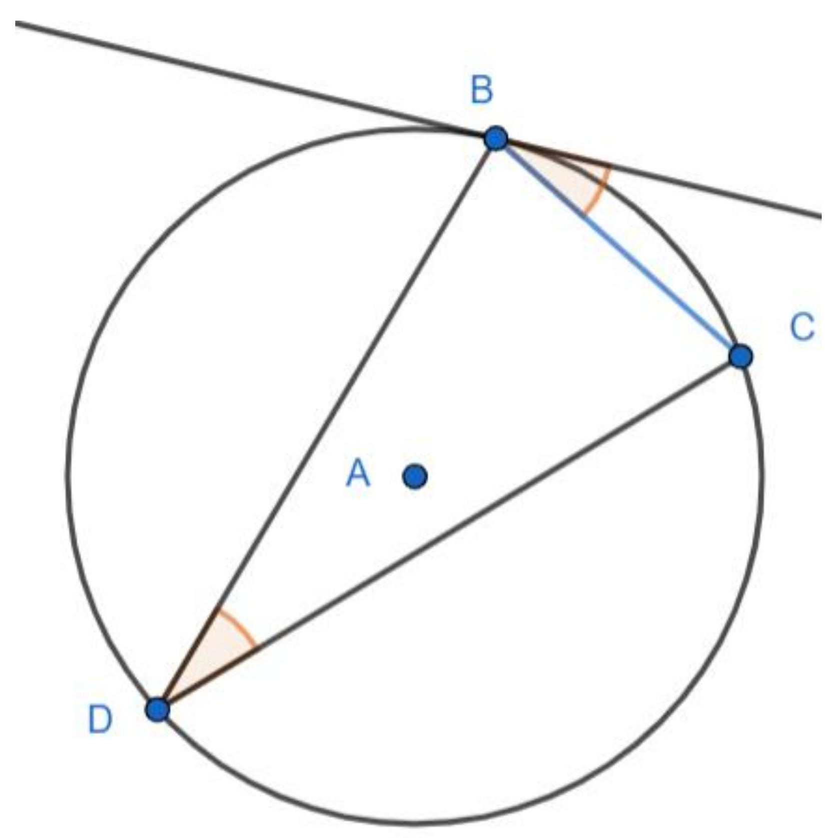

Если к окружности из одной точки проведены две касательных, то длины отрезков касательных от этой точки до точек касания с окружностью равны. (AD = AC)

## Пересекающиеся хорды



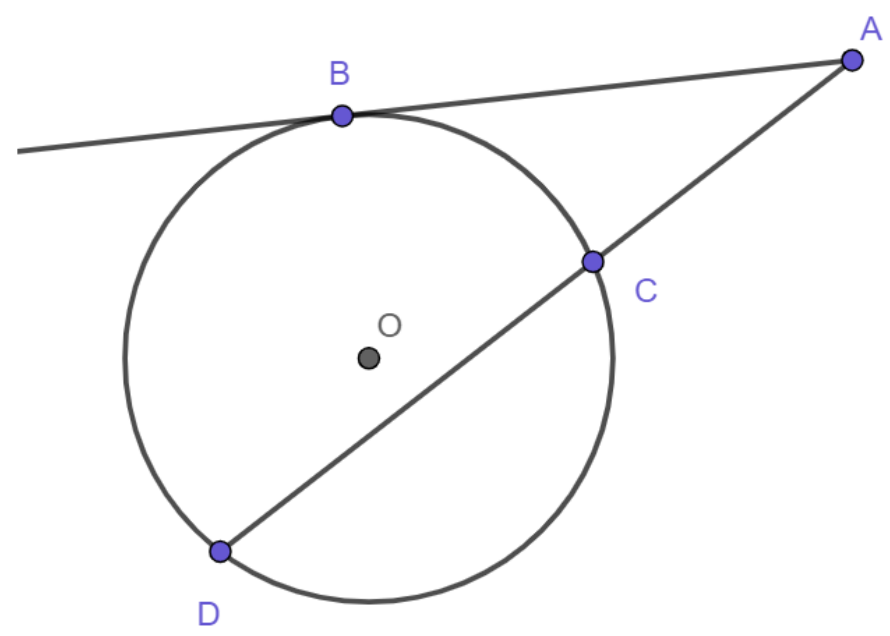

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE$$

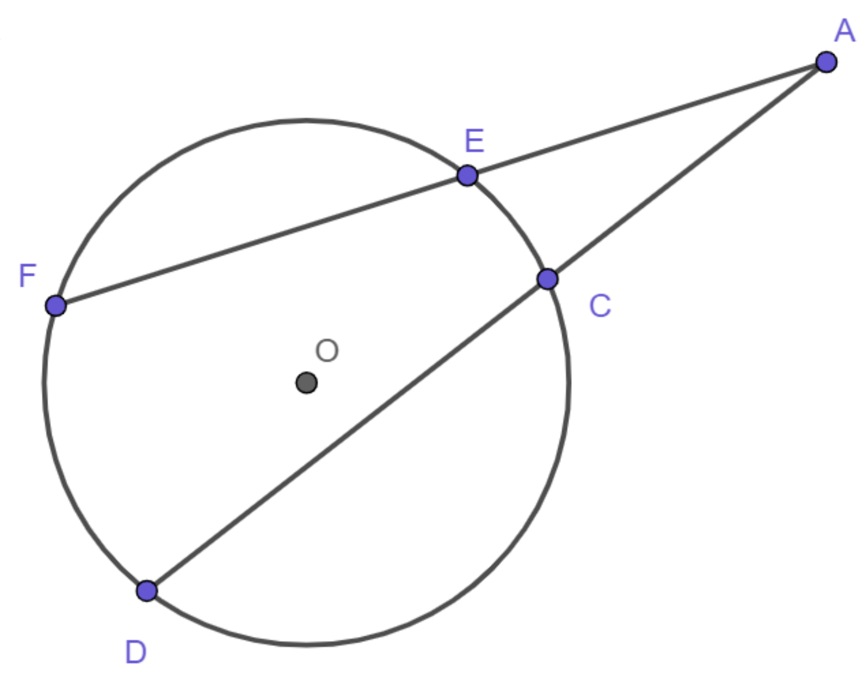
## Угол между хордой и касательной




Угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними. Другими словами, Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на эту хорду.

## Касательная и секущие

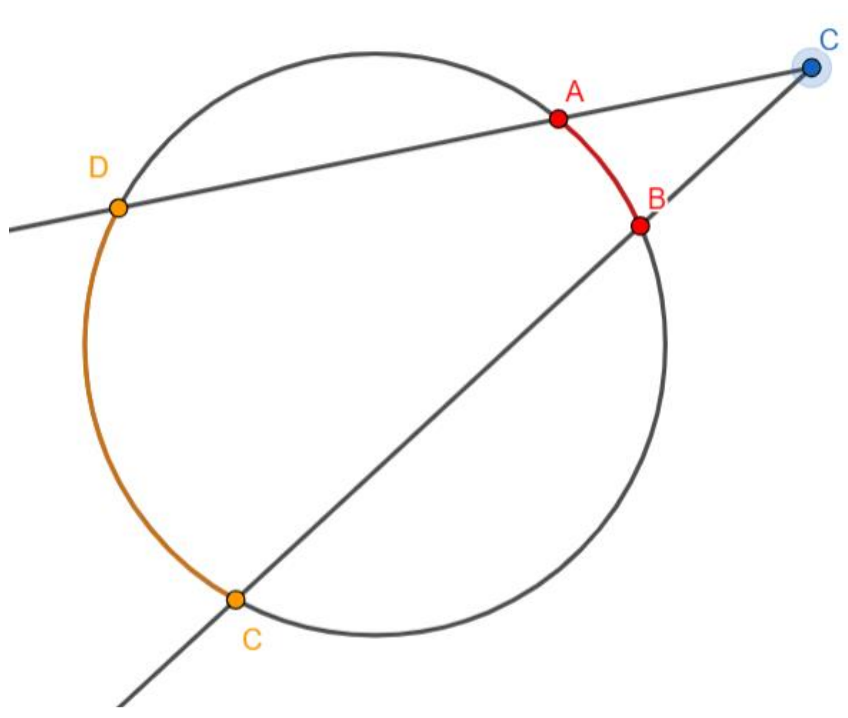



$$AB^2 = AD \cdot AC$$

$$AD \cdot AC = AF \cdot AE$$

## Угол между секущими

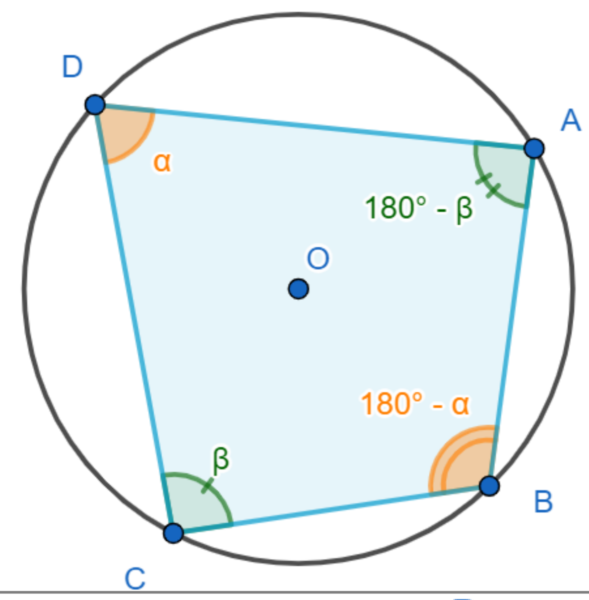



Угол между двумя секущими (с вершиной вне окружности) равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности

$$\angle ACB = \frac{1}{2}(\cup CD - \cup AB)$$

## Вписанный в окружность четырёхугольник

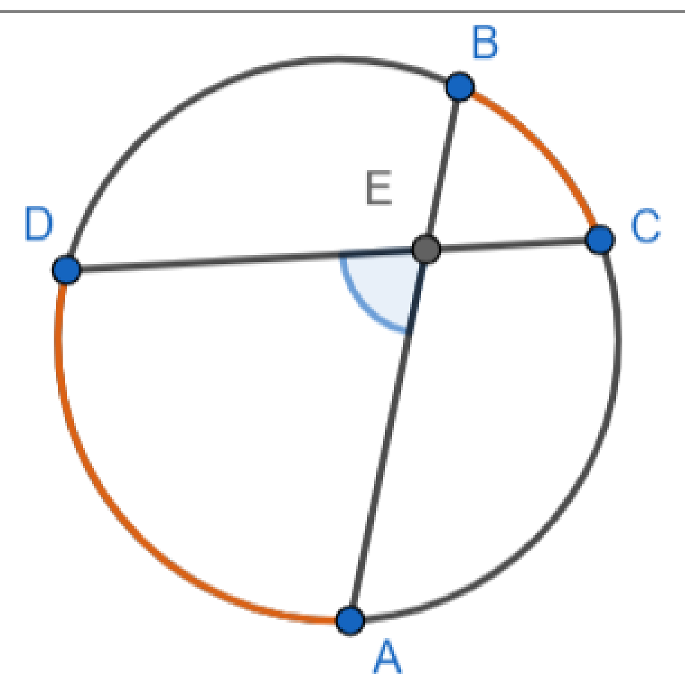
Если четырёхугольник вписан в окружность, то суммы величин его противоположных углов равны 180°.




## Угол между хордами

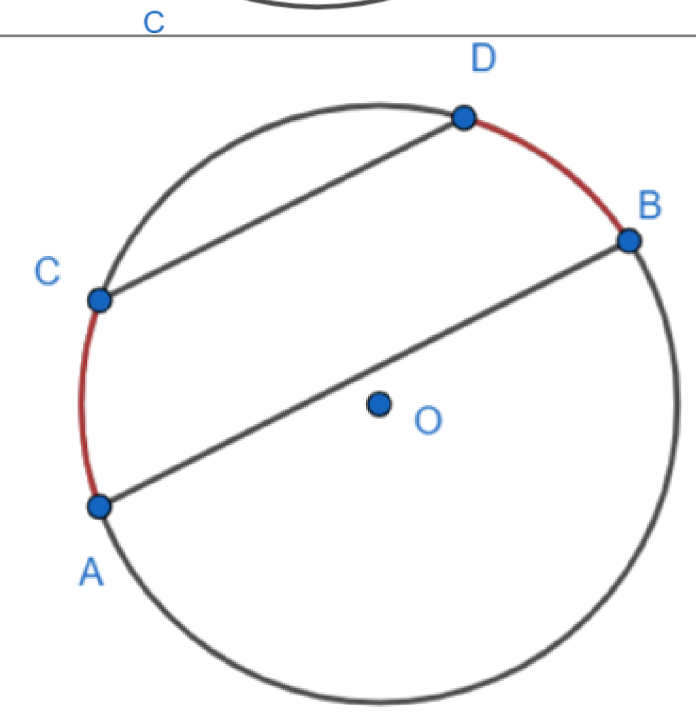
Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами

$$\angle AED = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup CB)$$



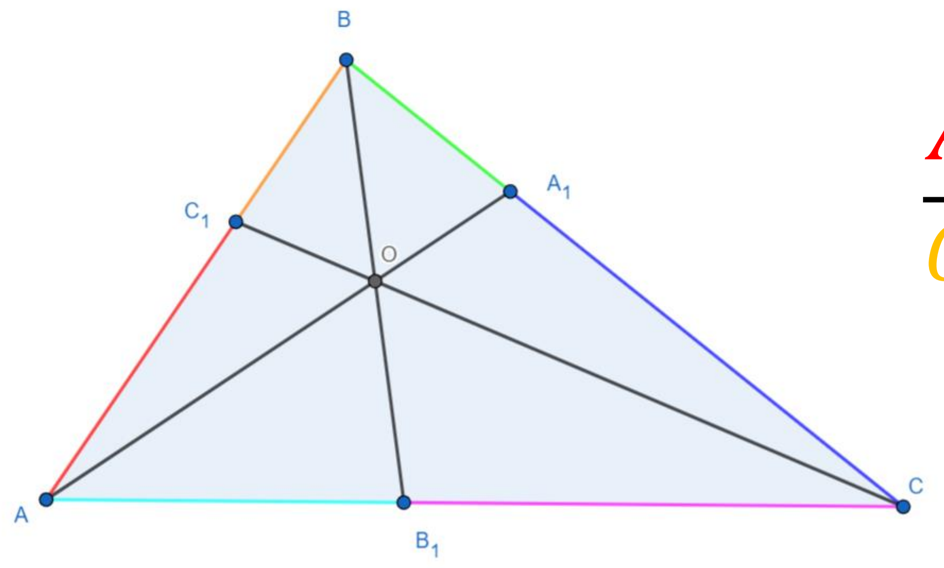

## Параллельные хорды

Дуги, заключённые между параллельными хордами, равны.



## Теорема Чевы

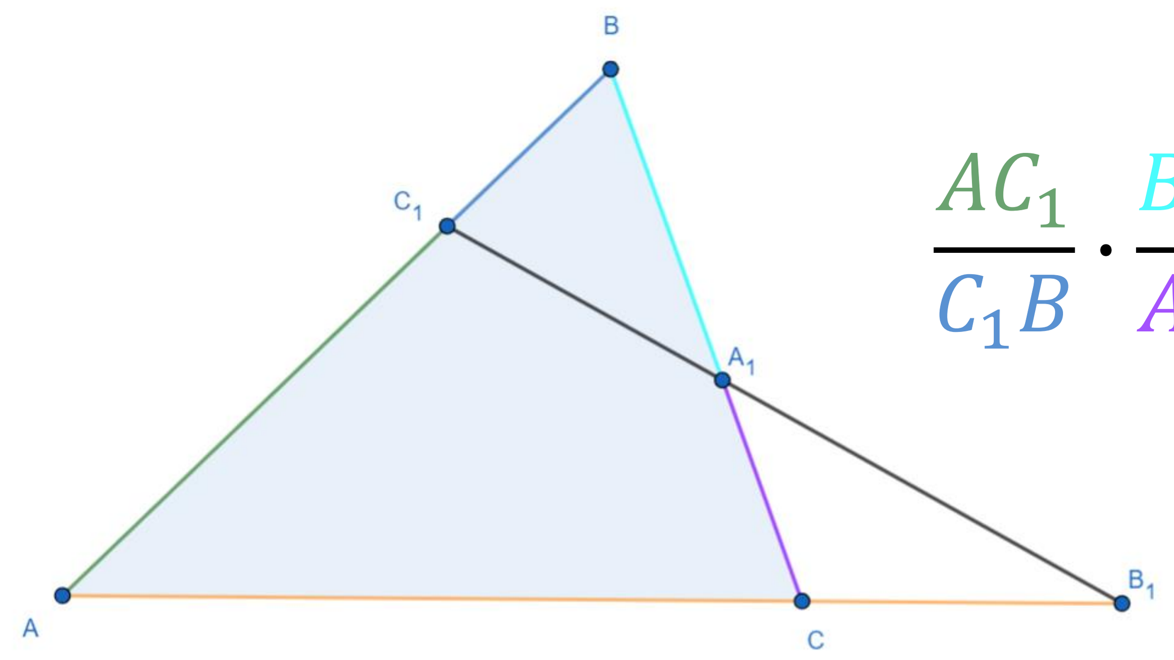
Если на сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$ (рис.1), то отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке **тогда и только тогда**, когда выполнено равенство



$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

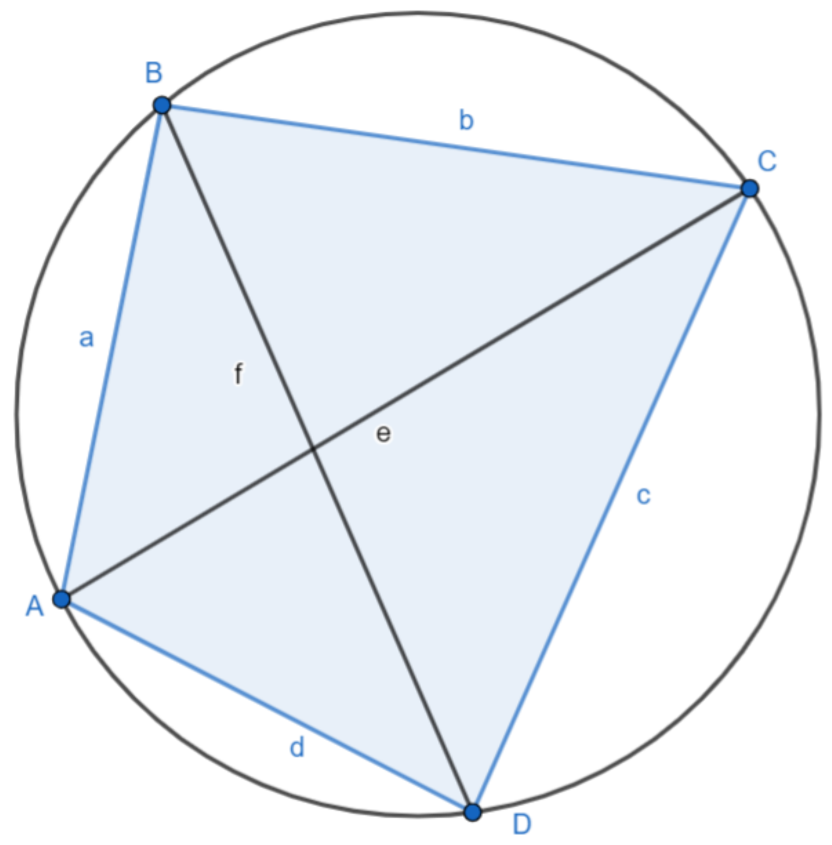
## Теорема Менелая

Если на сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $C_1$ и $A_1$, а точка $B_1$ взята на продолжении стороны $AC$ за точку $C$ (рис.1), то точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$ лежат на одной прямой **тогда и только тогда**, когда выполнено равенство



$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

## Формула Брахмагупты и Теорема Птолемея

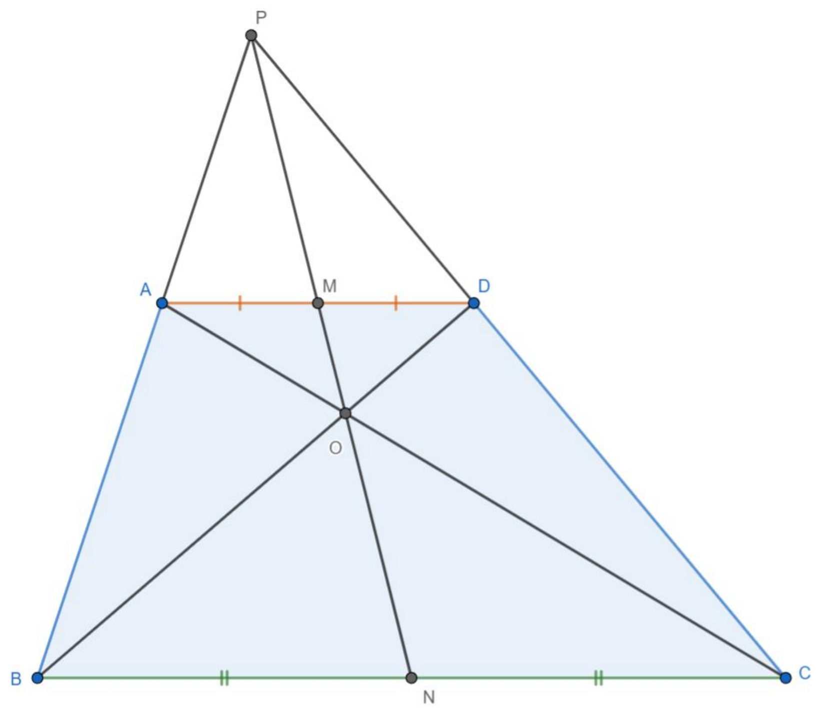


$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

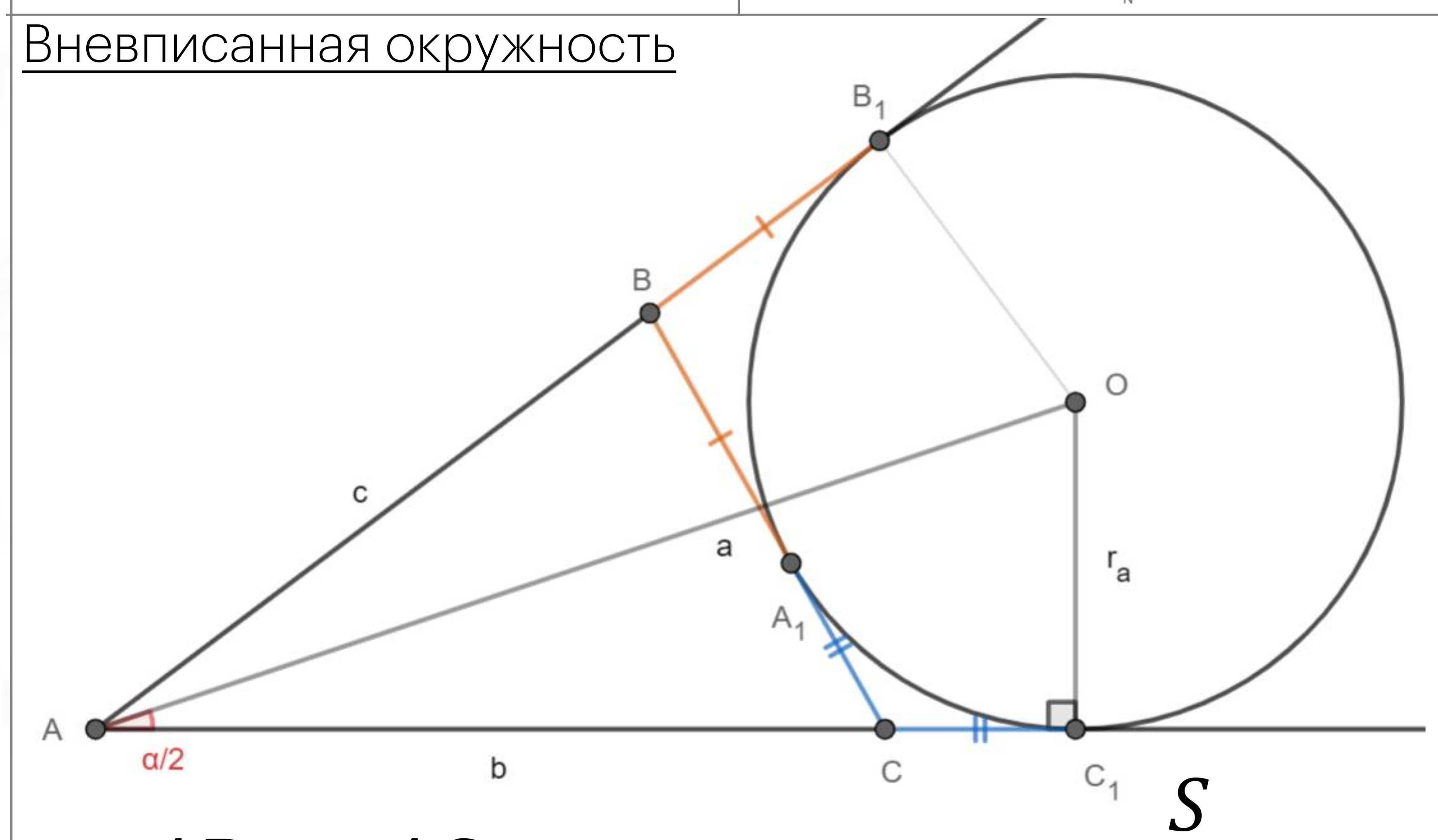
$$ef=ac+bd \qquad p=\frac{a+b+c+d}{2}$$

## Замечательное свойство трапеции

Продолжения боковых сторон трапеции пересекаются в точке P. Точка O – точка пересечения диагоналей трапеции. Тогда прямая PO пересекает основания трапеции в их серединах



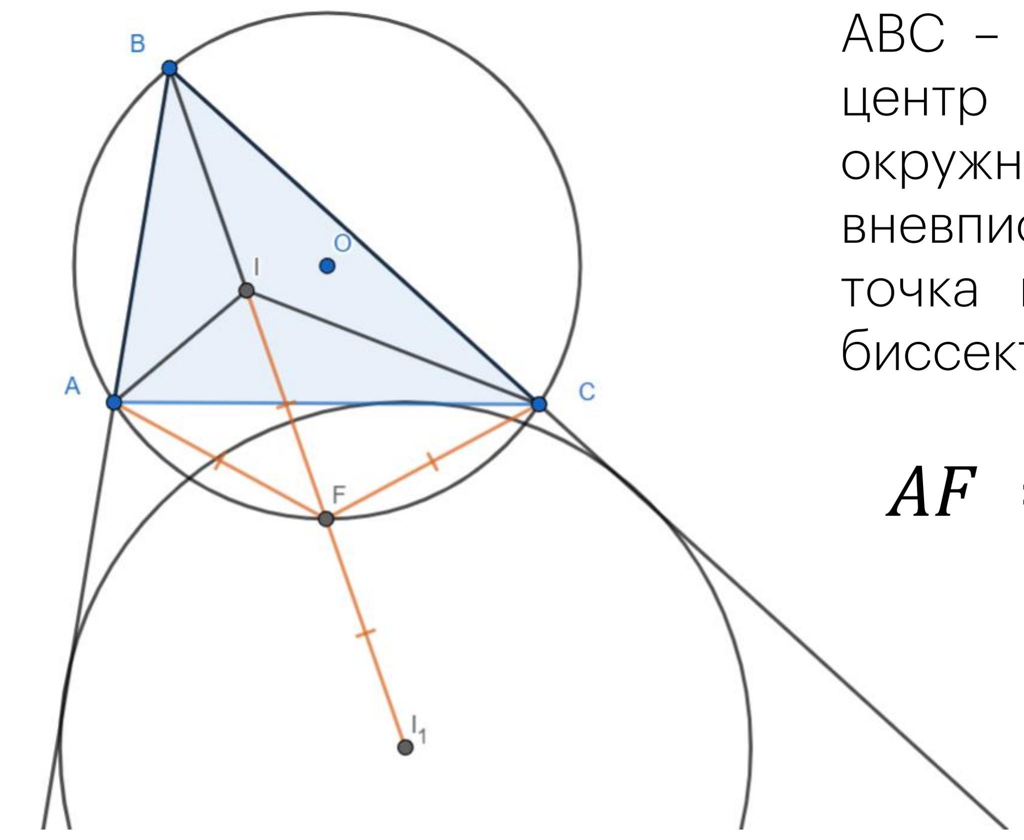
## Вневписанная окружность



$$AB_1=AC_1=p \qquad r_a=\frac{S}{p-a}$$

$$p=\frac{a+b+c}{2} \qquad r_a=p\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

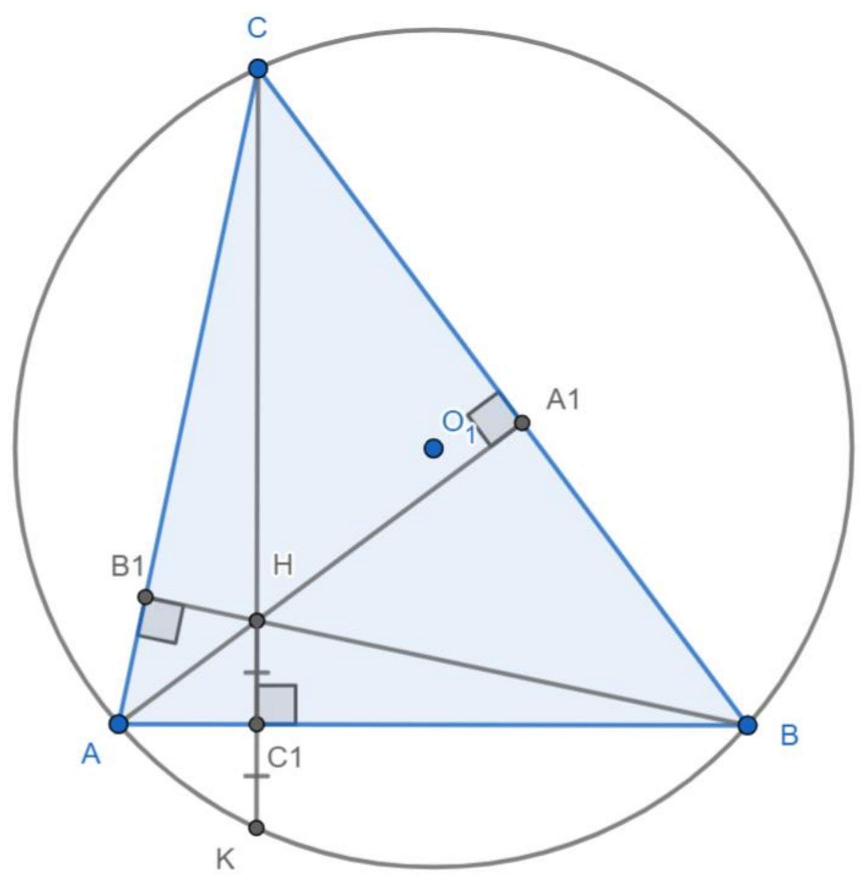
## Лемма о трезубце (необходимо доказывать)

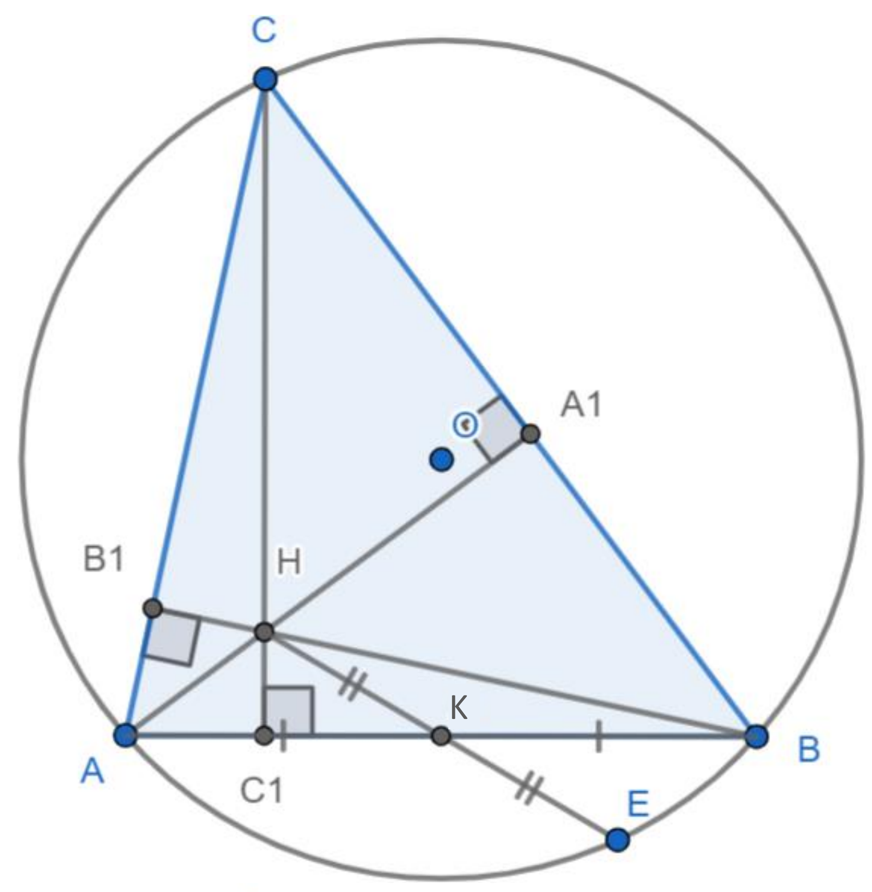


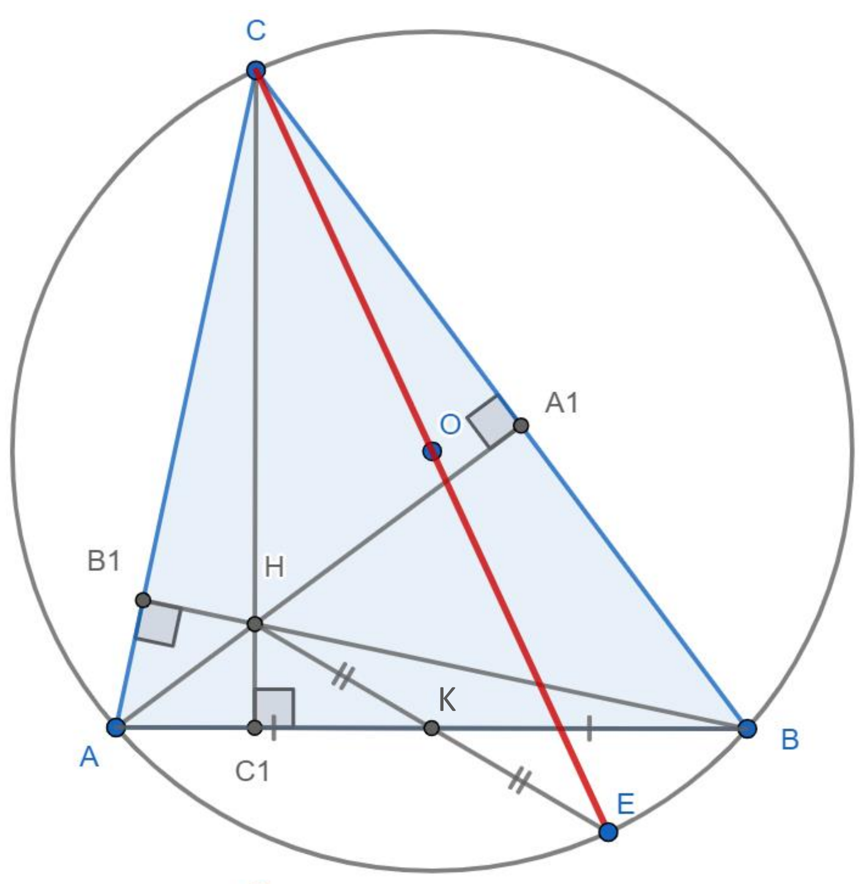
ABC – вписан в окружность. I – центр вписанной в ABC окружности, I1 – центр вневписанной окружности. F – точка пересечения окружности биссектрисой угла B. Тогда

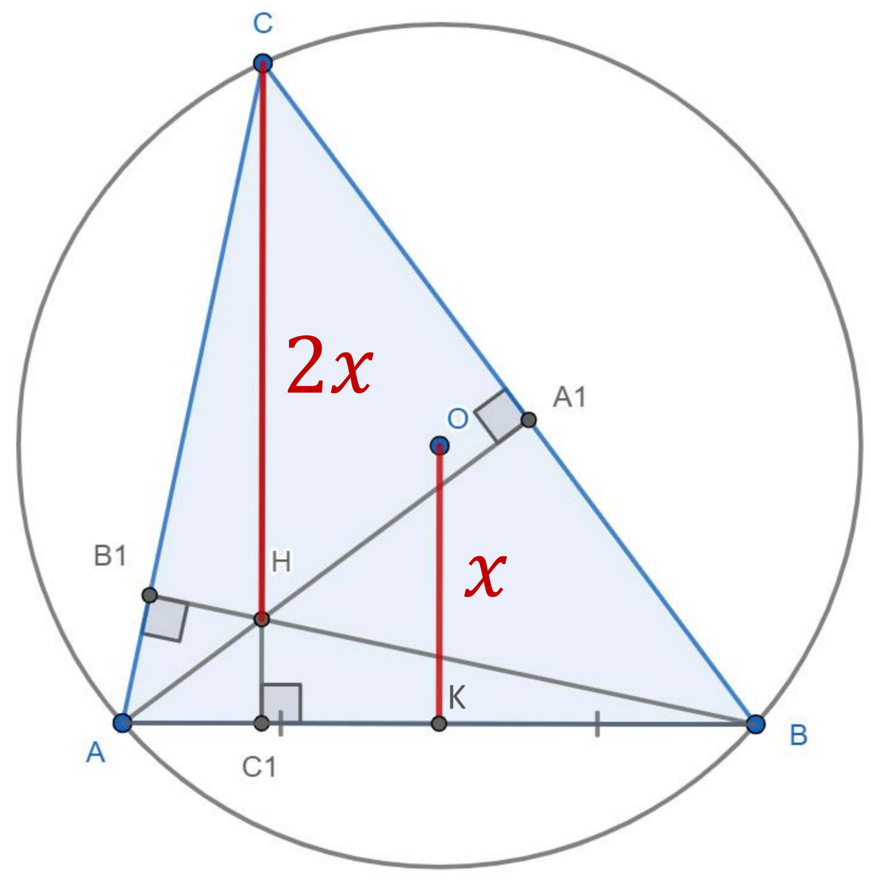
$$AF=FI=FC=FI_1$$

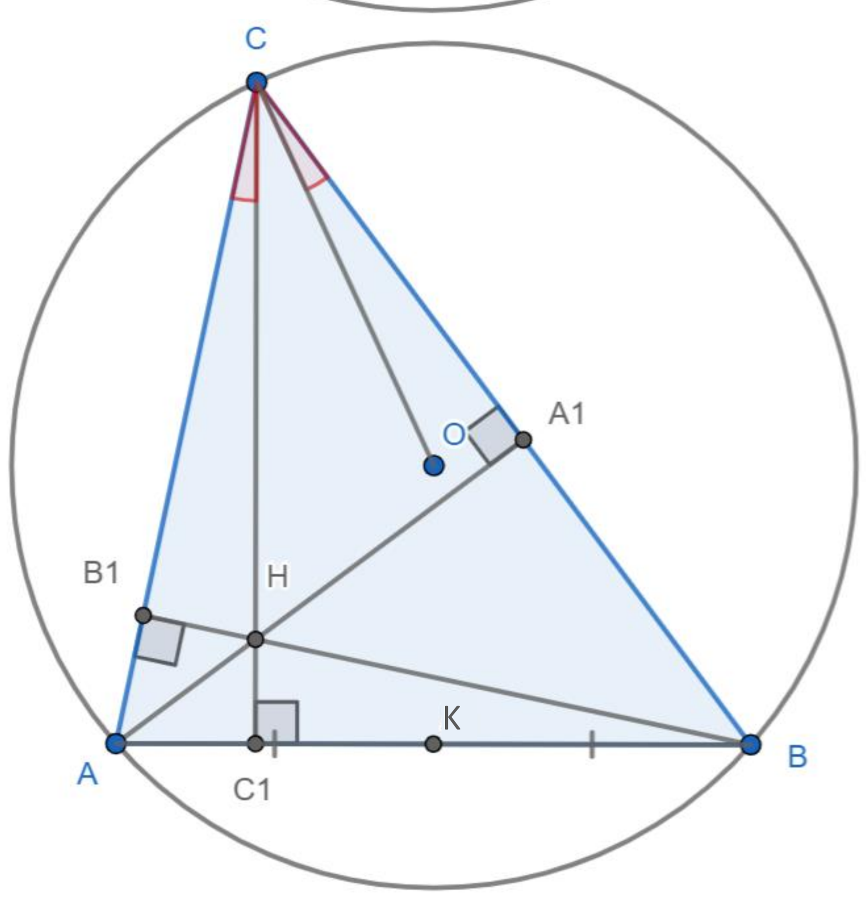
## Свойства ортоцентра (необходимо доказывать)

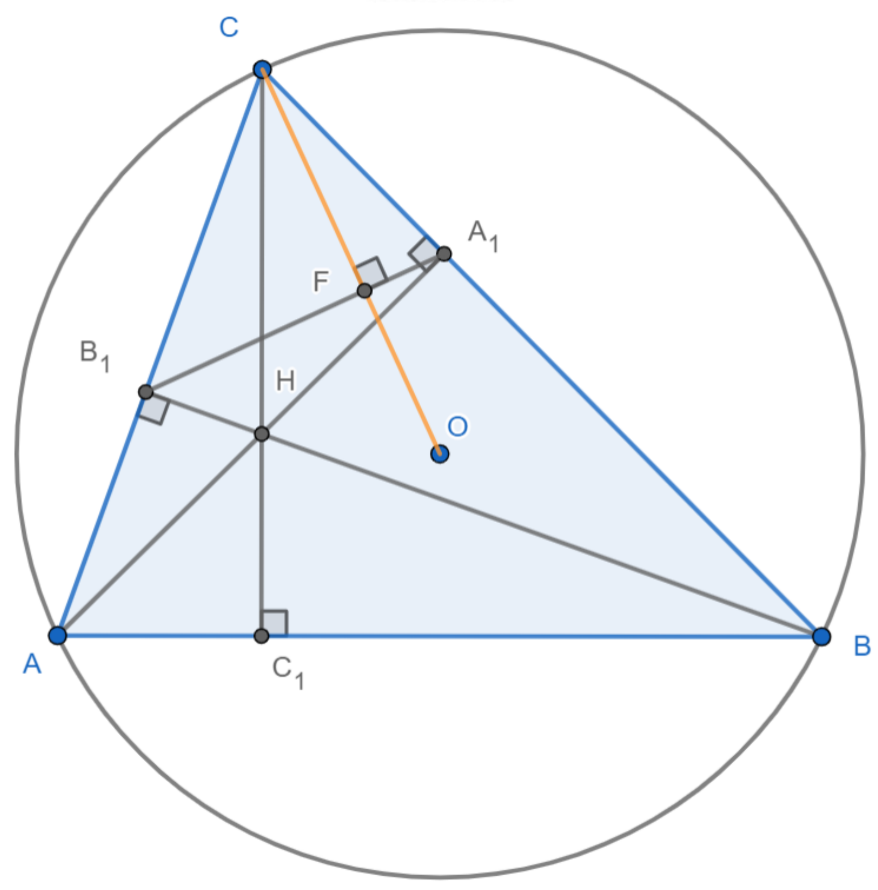






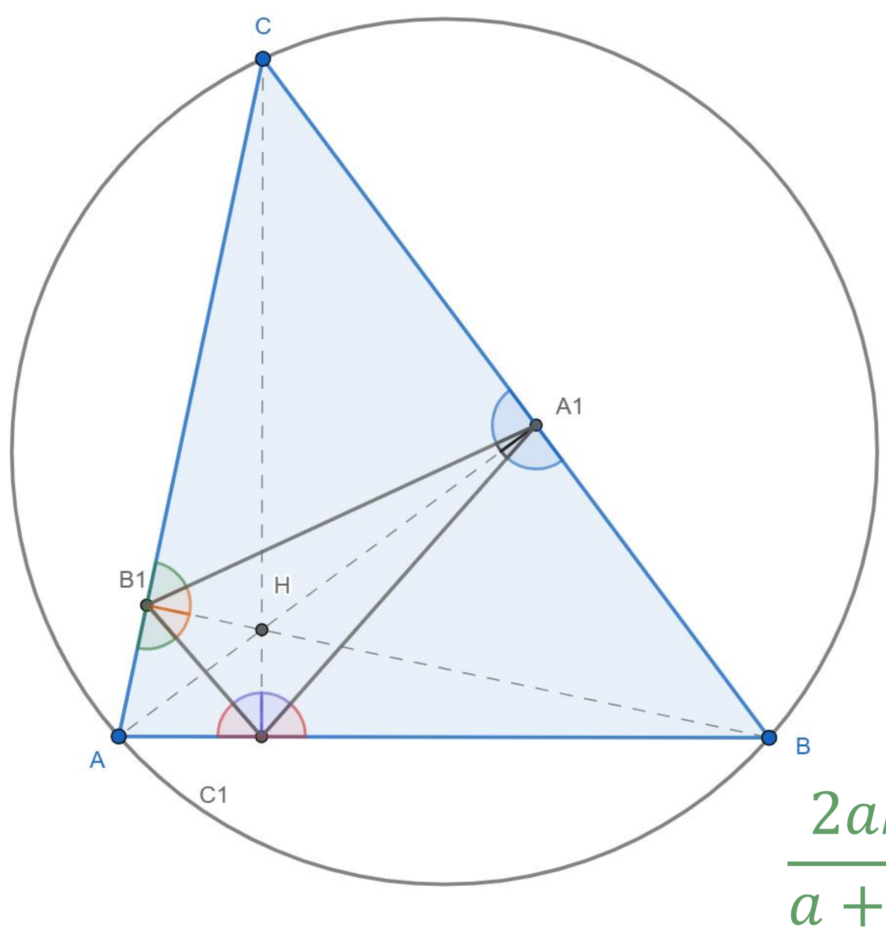


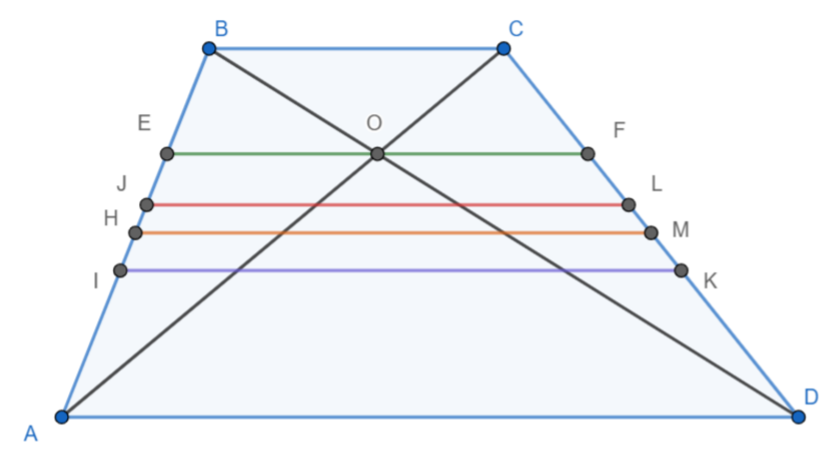





$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \qquad k=\cos C$$

$$AB=CH\operatorname{tg}C$$





$$h\le g\le m\le s$$

$$\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$