Алгебра

Тригонометрические формулы:

$$\sin\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Четность/нечетность тригонометрических функций

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$

$ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$

Периодичность функций

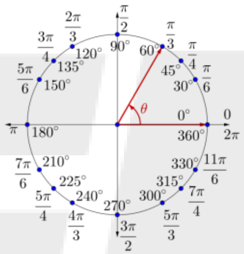
$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$

$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$

$tg(\alpha + \pi) = tg\,\alpha$

$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$

Тригонометрическая окружность



Признаки делимости

Признак делимости на 2

Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2, то есть является чётной.

Пример:

1268 делится на 2 (т.к. последняя цифра 8 является четной)

Признак делимости на 3

Число делится на 3 без остатка тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 без остатка.

Пример:

201432 делится на 3 (т.к. сумма цифр 2+0+1+4+3+2=12 также делится на 3)

Признак делимости на 4

Число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры составляют число, которое делится на 4.

Пример:

128 : 4 = 32 (последние две цифры числа 128 - это 28. 28 делится на 4 без остатка, следовательно, число 128 тоже будет делиться на 4 без остатка)

Признак делимости на 5

Число делится на 5 без остатка тогда и только тогда, когда его последняя цифра 5 или 0.

Пример:

625 : 5 = 125 (число 625 оканчивается на 5, следовательно, оно делится на 5 без остатка)

Признаки делимости

Признак делимости на 8

Число делится на 8 тогда и только тогда, когда число, образованное тремя его последними цифрами, делится на 8.

Пример:

12335862160 делится на 8 (т.к. последние три цифры составляют число 160, которое делится на 8)

Признак делимости на 9

Число делится на 9 без остатка тогда и только тогда, когда сумма его цифр делиться на 9 без остатка.

Пример:

594 : 9 = 66 (число 594 делится на 9 без остатка, так как сумма цифр числа делится на 9: 5 + 9 + 4 = 18)

Признак делимости на 10

Число делится на 10, если его последняя цифра 0

Пример:

465756870 делится на 10 (т.к. последняя цифра 0)

Признак делимости на 11

На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечётные места, либо равна сумме цифр, занимающих чётные места, либо отличается от неё на число, делящееся на 11.

Пример:

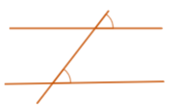
10846 делится на 11, потому что 1-0+8-4+6=11.

Планиметрия

Накрест лежащие

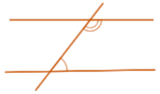
Равны при параллельных прямых (1 признак параллельности прямых)

Соответственные



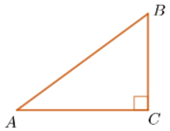
Равны при параллельных прямых (2 признак параллельности)

Односторонние



В сумме 180◦ при параллельных прямых (3 признак)

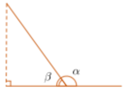
Острые углы в прямоугольном треугольнике



$\sin\angle A = \cos\angle B$

$\sin\angle B = \cos\angle A$

Синус, косинус, тангенс тупых углов



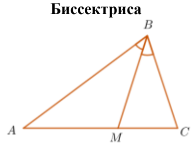
$\sin\alpha = \sin\beta$

$\cos\alpha = -\cos\beta$

$tg\,\alpha = -tg\,\beta$

(необходимо для задач на произвольную)

Биссектриса

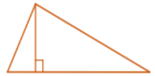


Биссектриса – это луч, делящий угол пополам

Медиана

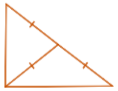
Медиана – это отрезок, делящий противоположную сторону треугольника пополам

Высота



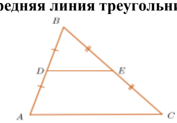
Высота — перпендикуляр, опущенный из вершины на противоположную сторону.

Медиана в прямоугольном треугольнике



В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы

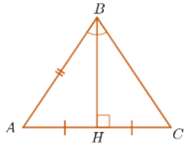
Средняя линия треугольника



-соединяет середины сторон

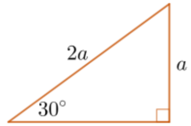
- параллельна противоположной стороне и равна ее половине

Равнобедренный треугольник

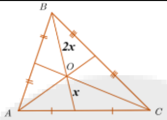


Биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию, равны

Свойство прямоугольного треугольника

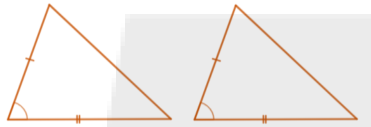
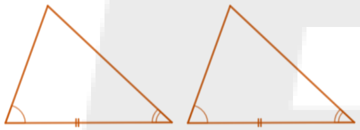
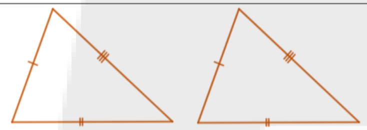


Катет, лежащий напротив угла 30◦, равен половине гипотенузы

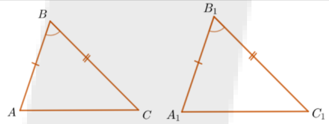
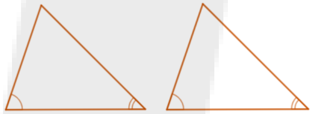
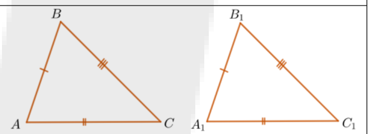


Медианы треугольника пересекаются в точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.

Равенство треугольников

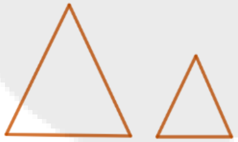
По двум сторонам и углу между ними	
По стороне и двум прилежащим к ней углам	
По трем сторонам	

Подобие треугольников

По двум пропорциональным сторонам и углу между ними: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$	
По двум равным углам	
По трем пропорциональным сторонам: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$	

Отношение площадей

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия



$$\frac{S_{бол}}{S_{мал}} = k^2$$

Отношение объемов

Отношение объемов подобных фигур равно кубу коэффициента подобия

$$\frac{V_{бол}}{V_{мал}} = k^3$$

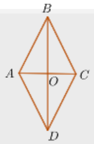
Параллелограмм

Параллелограмм – четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны

Параллелограмм

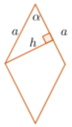
В параллелограмме сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180◦

Ромб



Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны

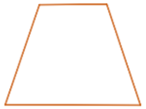
Ромб



$S = a^2 \cdot \sin\alpha$

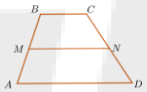
$S = ah$

Трапеция



Трапеция – это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две нет

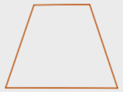
Средняя линия трапеции



- соединяет середины сторон
- параллельна основаниям и равна их полусумме

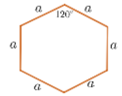
$$MN = \frac{a+b}{2}$$

Трапеция

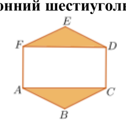


В трапеции сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180◦

Равносторонний шестиугольник

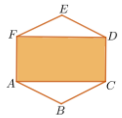


Равносторонний шестиугольник – шестиугольник, у которого все стороны равны и все углы равны 120◦



$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

$S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{шестиугольника}$



$S_{ACDF} = \sqrt{3}a^2$

$S_{ACDF} = \frac{2}{3}S_{шестиугольника}$

Окружность

Касательная

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания

Центральный угол

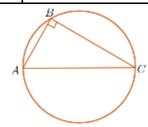
Центральный угол равен дуге, на которую он опирается

$\angle BOC = \cup BC$

Вписанный угол

Вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается

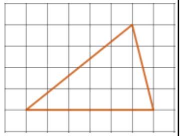
$\angle BAC = \frac{1}{2}\cup BC$



Угол, опирающийся на диаметр, является прямым.

№1.

План местности разбит на клетки. Каждая клетка является квадратом размером 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



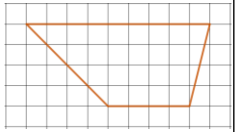
Ответ: 12

Местность представляет собой треугольник. Тогда площадь можно найти по формуле $S = \frac{1}{2}ah$:

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$$

№2.

План местности разбит на клетки. Каждая клетка является квадратом размером 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



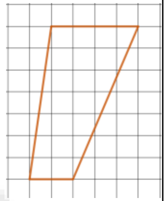
Ответ: 26

Местность представляет собой трапецию. Тогда площадь можно найти по формуле

$$S = \frac{a+b}{2}h = \frac{9+4}{2} \cdot 4 = \frac{13}{2} \cdot 4 = 26$$

№3.

План местности разбит на клетки. Каждая клетка является квадратом размером 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



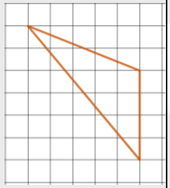
Ответ: 21

Местность представляет собой трапецию. Тогда площадь можно найти по формуле

$$S = \frac{a+b}{2}h = \frac{2+4}{2} \cdot 7 = \frac{6}{2} \cdot 7 = 3 \cdot 7 = 21$$

№4.

План местности разбит на клетки. Каждая клетка является квадратом размером 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.

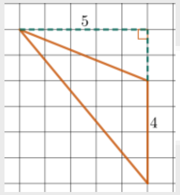


Ответ: 10

Местность представляет собой треугольник. Тогда площадь можно найти по формуле

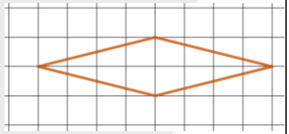
$$S = \frac{1}{2}ah$$

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$$



№5.

План местности разбит на клетки. Каждая клетка является квадратом размером 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: 8

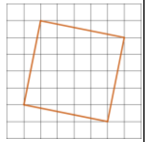
Местность представляет собой ромб. Тогда площадь можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8$$

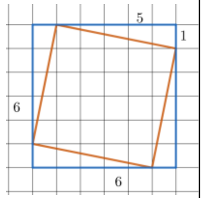
№6.

План местности разбит на клетки. Каждая клетка является квадратом размером 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.
.



Ответ: 26

Площадь четырехугольника равна разности площади прямоугольника и четырех прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного четырехугольника.



Найдем площадь прямоугольного треугольника:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 = 2{,}5$$

Найдем площадь квадрата (большого):

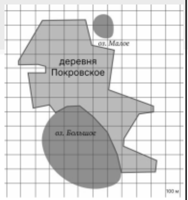
$$S = 6 \cdot 6 = 36$$

Поэтому

$$S = 36 - 4 \cdot 2{,}5 = 36 - 10 = 26$$

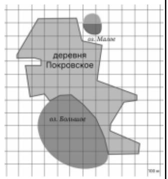
№7.

На фрагменте географической карты схематично изображены границы деревни Покровское и очертания озёр Малое и Большое (площадь одной клетки равна одному гектару). Оцените приближённо площадь озера Малое.
Ответ дайте в гектарах с округлением до целого числа..



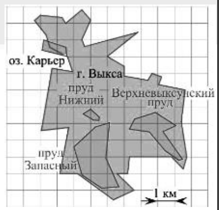
Ответ: 2

Разделим необходимую площадь на две фигуры.
Можно сказать, что обе фигуры занимают примерно площадь равную одной клетке.
Тогда общая площадь равна примерно 2 клеткам, следовательно 2 гектарам.

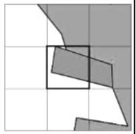


№8.

На фрагменте географической карты схематично изображены границы города Выксы и очертания водоёмов (длина стороны квадратной клетки равна 1 км). Оцените приближённо площадь озера Карьер. Ответ дайте в квадратных километрах с округлением до целого значения.



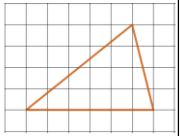
Ответ: 1



Озеро Карьер целиком помещается в 2 квадрата сетки. Площадь одного квадрата сетки равна одному квадратному гектару. Выделим квадрат (см. рис.), площадью 1 кв. га. Мысленно перемещая части озера извне этого квадрата внутрь него, мы почти заполним или слегка переполним этот квадрат. Следовательно, округленное до целых значение площади составляет один квадратный гектар.

№1.

План местности разбит на клетки. Каждая клетка является квадратом размером 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



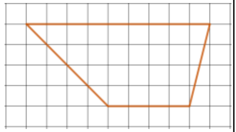
Ответ: 12

Местность представляет собой треугольник. Тогда площадь можно найти по формуле $S = \frac{1}{2}ah$:

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$$

№2.

План местности разбит на клетки. Каждая клетка является квадратом размером 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



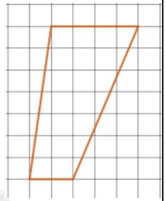
Ответ: 26

Местность представляет собой трапецию. Тогда площадь можно найти по формуле

$$S = \frac{a+b}{2}h = \frac{9+4}{2} \cdot 4 = \frac{13}{2} \cdot 4 = 26$$

№3.

План местности разбит на клетки. Каждая клетка является квадратом размером 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



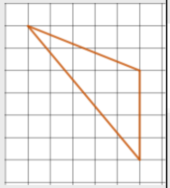
Ответ: 21

Местность представляет собой трапецию. Тогда площадь можно найти по формуле

$$S = \frac{a+b}{2}h = \frac{2+4}{2} \cdot 7 = \frac{6}{2} \cdot 7 = 3 \cdot 7 = 21$$

№4.

План местности разбит на клетки. Каждая клетка является квадратом размером 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.

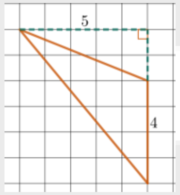


Ответ: 10

Местность представляет собой треугольник. Тогда площадь можно найти по формуле

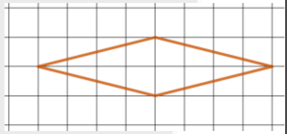
$$S = \frac{1}{2}ah$$

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$$



№5.

План местности разбит на клетки. Каждая клетка является квадратом размером 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: 8

Местность представляет собой ромб. Тогда площадь можно найти по формуле

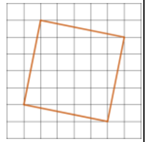
$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8$$

№6.

План местности разбит на клетки. Каждая клетка является квадратом размером 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.

.



Ответ: 26

Площадь четырехугольника равна разности площади прямоугольника и четырех прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного четырехугольника.

Найдем площадь прямоугольного треугольника:

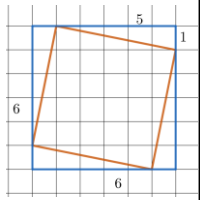
$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 = 2{,}5$$

Найдем площадь квадрата (большого):

$$S = 6 \cdot 6 = 36$$

Поэтому

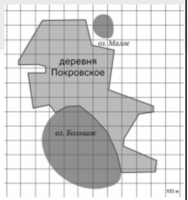
$$S = 36 - 4 \cdot 2{,}5 = 36 - 10 = 26$$



№7.

На фрагменте географической карты схематично изображены границы деревни Покровское и очертания озёр Малое и Большое (площадь одной клетки равна одному гектару). Оцените приближённо площадь озера Малое.

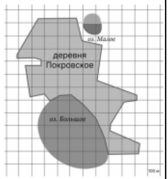
Ответ дайте в гектарах с округлением до целого числа..



Ответ: 2

Разделим необходимую площадь на две фигуры. Можно сказать, что обе фигуры занимают примерно площадь равную одной клетке.

Тогда общая площадь равна примерно 2 клеткам, следовательно 2 гектарам.

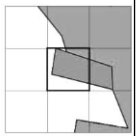


№8.

На фрагменте географической карты схематично изображены границы города Выксы и очертания водоёмов (длина стороны квадратной клетки равна 1 км). Оцените приближённо площадь озера Карьер. Ответ дайте в квадратных километрах с округлением до целого значения.

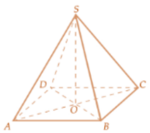
Ответ: 1

Озеро Карьер целиком помещается в 2 квадрата сетки. Площадь одного квадрата сетки равна одному квадратному гектару. Выделим квадрат (см. рис.), площадью 1 кв. га. Мысленно перемещая части озера извне этого квадрата внутрь него, мы почти заполним или слегка переполним этот квадрат. Следовательно, округленное до целых значение площади составляет один квадратный гектар.

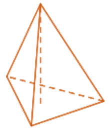


Стереометрия

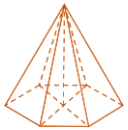
Высота в правильных пирамидах и апофема



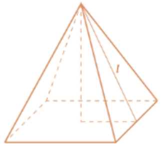
Высота падает в точку пересечения диагоналей основания пирамиды



Высота падает в точку пересечения медиан основания пирамиды

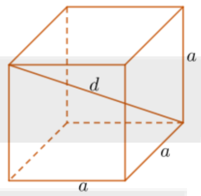


Высота падает в точку пересечения диагоналей основания пирамиды



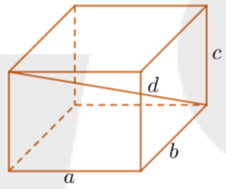
Апофема (l) – высота боковой грани

Диагональ куба



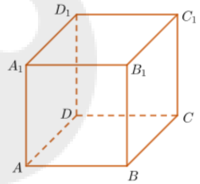
$d = a\sqrt{3}$

Диагональ параллелепипеда



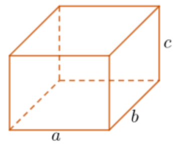
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Куб



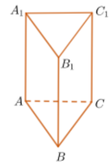
$S_{\text{пол. пов.}} = 6 \cdot a^2$

Параллелепипед



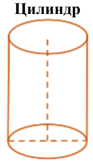
$S_{\text{поверх.}} = 2(ab + bc + ac)$

Призма



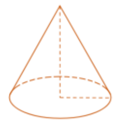
$S_{\text{бок.пов.}} = P_{\text{осн}} \cdot h$

Цилиндр



$S_{\text{пол.пов.}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

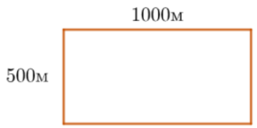
Конус



$S_{\text{пол.пов}} = \pi rl + \pi r^2$

№1.

Участок земли под строительство санатория имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 1000 м и 500 м. Одна из больших сторон участка идёт вдоль моря, а три остальные стороны нужно огородить забором. Найдите длину этого забора. Ответ дайте в метрах.



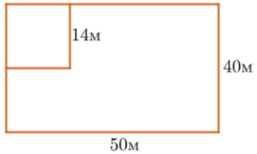
Ответ: 2000

Огородить забором необходимо 2 стороны участка длиной 500 м и 1 сторону длиной 1000 м, то есть

$$2 \cdot 500 + 1000 = 2000 \text{ м}$$

№2.

Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 50 метров и 40 метров. Хозяин отгородил на участке квадратный вольер со стороной 14 метров (см. рис.). Найдите площадь оставшейся части участка. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: 1804

Площадь всего участка: $40 \cdot 50 = 2000$ кв. м

Площадь вольера: $14 \cdot 14 = 196$ кв. м

Площадь оставшейся части участка: $2000 - 196 = 1804$ кв. м

№3.

Участок земли имеет прямоугольную форму. Стороны прямоугольника равны 40 м и 55 м. Найдите длину забора (в метрах), которым нужно огородить участок, предусмотрев проезд шириной 3 м.

Ответ: 187

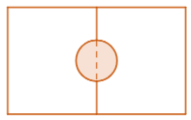
Забор должен проходить по периметру участка. Длина периметра:

$$2 \cdot (55 + 40) = 2 \cdot 95 = 190\text{м}$$

При этом должен быть проезд шириной 3 м, то есть в этом месте забора не будет. Тогда длина забора равна $190 - 3 = 187$ м.

№4.

Два садовода, имеющие прямоугольные участки размерами 25 м на 30 м с общей границей, договорились и сделали общий круглый пруд площадью 160 квадратных метров (см. чертёж), причём граница участков проходит точно через центр пруда. Какова площадь (в квадратных метрах) оставшейся части участка каждого садовода?

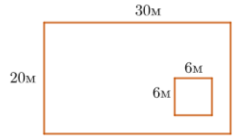


Ответ: 670

Площадь каждого из участков равна $25 \cdot 30 = 750$ кв. м, а площадь пруда равна 160 кв. м. На каждом участке находится половина пруда, занимая 80 кв. м. Поэтому площадь оставшейся части каждого из участков равна $750 - 80 = 670$ кв. м.

№5.

Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 20 м и 30 м. Дом, расположенный на участке, имеет форму квадрата со стороной 6 м. Найдите площадь оставшейся части участка. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: 564

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину, поэтому площадь участка равна $20 \cdot 30 = 600$ кв. м. Площадь квадрата равна квадрату его стороны, поэтому площадь дома равна $6 \cdot 6 = 36$ кв. м. Тем самым, площадь участка, незанятого домом равна $600 - 36 = 564$ кв. м.

№6.

Квартира состоит из двух комнат, кухни, коридора и санузла (см. чертёж). Кухня имеет размеры 3,5 м × 4 м, первая комната — 4 м × 4 м, санузел имеет размеры 2 м × 2 м, длина коридора — 10 м. Найдите площадь второй комнаты (в квадратных метрах).

Ответ: 18

Найдём площадь всей квартиры:

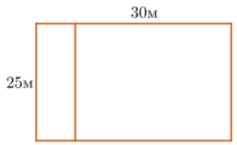
$$S_{\text{квар}} = 6 \cdot 12 = 72$$

Найдём площадь второй комнаты:

$$S_{\text{комн}} = 72 - (4 \cdot 3{,}5 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 10) = 72 - 54 = 18$$

№7.

Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 25 метров и 30 метров. Хозяин планирует обнести его забором и разделить таким же забором на две части, одна из которых имеет форму квадрата. Найдите общую длину забора в метрах.



Ответ: 135

Длина забора равна сумме периметра и ширины. Найдем периметр участка

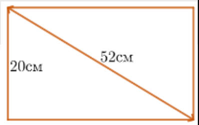
$$30 + 30 + 25 + 25 = 110 \text{ м}$$

Длина забора

$$110 + 25 = 135 \text{ м}$$

№8.

Диагональ прямоугольного экрана телевизора равна 52 см, а высота экрана — 20 см. Найдите ширину экрана. Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ: 48

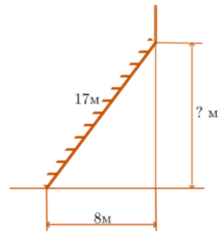
Пусть x — искомая ширина. Согласно теореме Пифагора (квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов), получаем:

$$x^2 + 20^2 = 52^2$$
$$x^2 = 52^2 - 20^2$$
$$x^2 = 2704 - 400$$
$$x^2 = 2304$$
$$x = \pm 48$$

Поскольку ширина не может быть отрицательной величиной, получаем, что она равна 48.

№9.

Пожарную лестницу длиной 17 м приставили к окну дома. Нижний конец лестницы отстоит от стены на 8 м. На какой высоте находится верхний конец лестницы? Ответ дайте в метрах.



Ответ: 15

Высоту верхнего конца лестницы находим по теореме Пифагора:

$$\sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{(17-8)(17+8)} = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15$$

№10.

Какой наименьший угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки часов в 17:00?

Ответ: 150

Угол между двумя часовыми делениями на циферблате равен $360°:12 = 30°$. В пять часов вечера между минутной и часовой стрелкой пять часовых делений, значит, угол (наименьший) между ними равен $30° \cdot 5 = 150°$.

№11.

Колесо имеет 12 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.

Ответ: 30

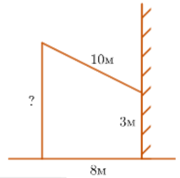
Спицы делят колесо на 12 равных секторов, а значит, делят полный угол 360° на 12 равных:

$$\frac{360°}{12} = 30°$$

№12.

От столба к дому натянут провод длиной 10 м, который закреплён на стене дома на высоте 3 м от земли (см. рис.). Найдите высоту столба, если расстояние от дома до столба равно 8 м. Ответ дайте в метрах.

.



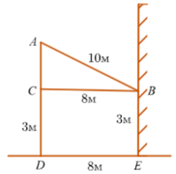
Ответ: 9

Проведём отрезок, параллельный горизонтальной прямой, как показано на рисунке, тогда AC — катет получившегося прямоугольного треугольника. По теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$$

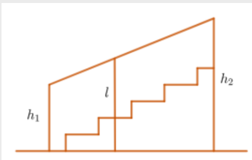
Следовательно, длина искомой стороны AD равна

$$AD = AC + CD = 6 + 3 = 9$$



№13.

Перила лестницы дачного дома для надёжности укреплены посередине вертикальным столбом. Найдите высоту l этого столба, если наименьшая высота h_1 перил относительно земли равна 1,5 м, а наибольшая h_2 равна 2,5 м. Ответ дайте в метрах.



Ответ: 2

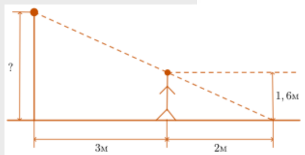
Заметим, что данная конструкция представляет собой трапецию, а столб — средняя линия данной трапеции. Длина средней линии трапеции равна полусумме оснований:

$$l = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{1.5 + 2.5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

№14.

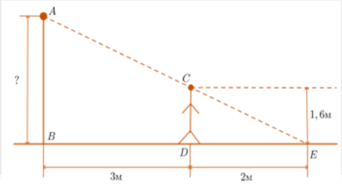
Человек, рост которого равен 1,6 м, стоит на расстоянии 3 м от уличного фонаря. При этом длина тени человека равна 2 м. Определите высоту фонаря (в метрах).

.



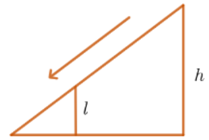
Ответ: 4

Введём обозначения, как показано на рисунке. Рассмотрим прямоугольные треугольники AEB и CDE, они имеют общий угол E и, следовательно, подобны по двум углам. Значит, $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE}$, откуда $AB = CD \cdot \frac{BE}{DE} = \frac{5 \cdot 1.6}{2} = \frac{8}{2} = 4.$



№15.

Детская горка укреплена вертикальным столбом, расположенным посередине спуска. Найдите высоту l этого столба, если высота h горки равна 2 метрам. Ответ дайте в метрах.

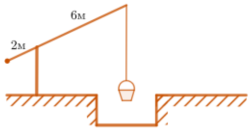


Ответ: 1

Данная конструкция представляет собой треугольник, в котором столб является средней линией. Длина средней линии треугольника равна половине длины стороны, которой она параллельна: $l = 2:2 = 1$ м.

№16.

На рисунке изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 2 м, а длинное плечо — 6 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, когда конец короткого поднимется на 1,5 м?.



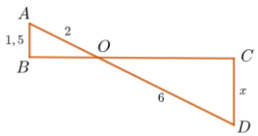
Ответ: 4,5

в задаче нужно найти величину x используя подобные прямоугольные треугольники ABO и DCO (по двум углам), показанные на рисунке ниже. Для них можно записать следующее соотношение:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{OD}{AO}$$

$$\frac{x}{1.5} = \frac{6}{2}$$

Откуда $x = \frac{6 \cdot 1.5}{2} = 3 \cdot 1.5 = 4.5$



№17.

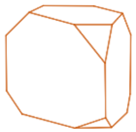
Колесо имеет 40 спиц. Углы между соседними спицами равны. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.

Ответ: 9

Колесо представляет собой круг, 40 спиц которого делят его на 40 круговых секторов. Так как полный угол равен 360°, для каждого из секторов имеем: $360° : 40 = 9°$. Таким образом, угол, образованный двумя соседними спицами равен 9°.

№1.

От деревянной правильной треугольной призмы отпилили все её вершины (см. рис.). Сколько граней у получившегося многогранника (невидимые рёбра на рисунке не изображены)?

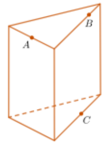


Ответ: 11

Изначально у треугольной призмы 5 граней и 6 вершин. Когда от нее отделили все вершины, количество граней стало $5 + 6 = 11$.

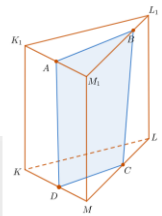
№2.

Плоскость, проходящая через три точки *A*, *B* и *C*, разбивает правильную треугольную призму на два многогранника. Сколько рёбер у многогранника, у которого больше вершин?



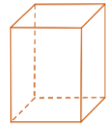
Ответ: 12

Плоскость сечения пересекает параллельные основания по параллельным прямым. Проведём через точку *C* прямую, параллельную *AB*, она пересечёт ребро призмы в точке *D*. Тем самым, трапеция *ABCD* — искомое сечение. Оно делит призму на две призмы: треугольную, имеющую 6 вершин (вершины: M, C, D, M1, A, B) и четырёхугольную, имеющую 8 вершин (вершины: K, L, D, C, K1, L1, A, B). Четырёхугольная призма имеет по 4 ребра (KD, CD, CL, KL, AK1, AB, K1L1, BL1) в каждом из оснований и 4 боковых ребра (AD, BC, KK1, LL1), всего 12 рёбер.



№3.

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами 80 см × 30 см × 40 см. Сколько литров составляет объём аквариума? В одном литре 1000 кубических сантиметров.

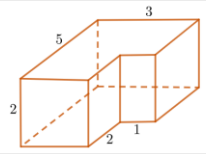


Ответ: 96

Объем аквариума равен: $80 \cdot 30 \cdot 40 = 96000$ см^3 или $96000 : 1000 = 96$ литров.

№4.

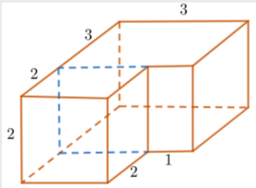
Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите объём этой детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах.



Ответ: 26

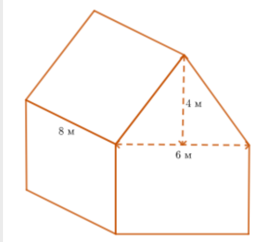
Объем данного многогранника равен сумме объемов параллелепипедов с ребрами 2 2, 2 и 3, 3, 2:

$V = V_1 + V_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2 = 8 + 18 = 26$



№5.

Двускатную крышу дома, имеющего в основании прямоугольник (см. рис.), необходимо полностью покрыть рубероидом. Высота крыши равна 4 м, длины стен дома равны 6 м и 8 м. Найдите, сколько рубероида (в квадратных метрах) нужно для покрытия этой крыши, если скаты крыши равны.



Ответ: 80

По теореме Пифагора найдём сторону ската крыши:

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Тогда площадь ската крыши равна:

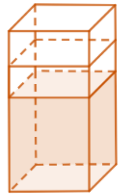
$$S = 8 \cdot 5 = 40$$

Тогда площадь крыши равна:

$$S = 2 \cdot 8 \cdot 5 = 80$$

№6.

В бак, имеющий форму прямой призмы, налито 12 л воды. После полного погружения в воду детали, уровень воды в баке поднялся в 1,5 раза. Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах, зная, что в одном литре 1000 кубических сантиметров.



Ответ: 6000

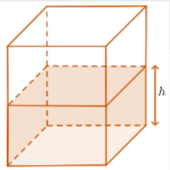
Объем детали равен объему вытесненной ею жидкости. После погружения детали в воду объём стал равен

$$12 \cdot 1{,}5 = 18 \text{ литров}$$

поэтому объём детали равен $18 - 12 = 6$ л $= 6000$ см^3.

№7.

Вода в сосуде, имеющем форму правильной четырёхугольной призмы, находится на уровне $h = 180$ см. На каком уровне окажется вода, если её перелить в другой сосуд, имеющий форму правильной четырёхугольной призмы, у которого сторона основания втрое больше, чем у данного? Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ: 20

Объём правильной четырёхугольной призмы равен $V = a^2 \cdot h$.

Тогда, объем до переливания равен $V = a^2 \cdot h_1$

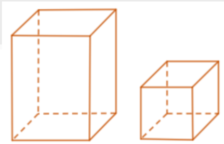
Объем после переливания равен $V = (3a)^2 \cdot h_2$

Тогда

$$a^2 \cdot h_1 = (3a)^2 \cdot h_2$$
$$a^2 \cdot h_1 = 9a^2 \cdot h_2$$
$$h_1 = 9h_2$$
$$180 = 9h_2$$
$$h_2 = \frac{1}{9} \cdot 180 = 20$$

№8.

Даны две коробки, имеющие форму правильной четырёхугольной призмы, стоящей на основании. Первая коробка в четыре с половиной раза ниже второй, а вторая втрое у́же первой. Во сколько раз объём первой коробки больше объёма второй?



Ответ: 2

Объём правильной четырёхугольной призмы вычисляется по формуле $V = a \cdot b \cdot c$, где a, b и c — длины сторон призмы. Поскольку первая коробка в четыре с половиной раза ниже второй ($c_2 = 4.5c_1$), а вторая втрое у́же первой ($a_1 = 3a_2, b_1 = 3b_2$) ,то

- Объем первой коробки равен $V_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$
- Объем второй коробки равен $V_2 = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2$

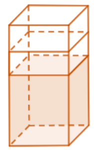
Тогда отношение объемов равно

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2} = \frac{3a \cdot 3b \cdot c}{a \cdot b \cdot 4.5c} = \frac{9}{4.5} = 2$$

Таким образом, объём первой коробки в 2 раза больше объёма второй.

№9.

В бак, имеющий форму правильной четырёхугольной призмы со стороной основания, равной 40 см, налита жидкость. Чтобы измерить объём детали сложной формы, её полностью погружают в эту жидкость. Найдите объём детали, если после её погружения уровень жидкости в баке поднялся на 2 см. Ответ дайте в кубических сантиметрах.



Ответ: 3200

Объем вытесненной жидкости равен объему детали (закон Архимеда). Уровень жидкости поднялся на $h = 2$ см, сторона основания $a = 40$ см, значит, вытесненный объем будет равен

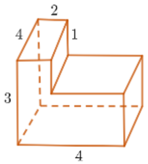
$$V = a^2 h = 40^2 \cdot 2 = 1600 \cdot 2 = 3200$$

Найденный объём является объёмом детали.

№10.

Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите площадь поверхности этой детали. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

.



Ответ: 96

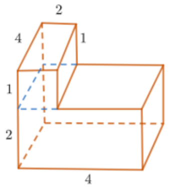
Площадь поверхности данного многогранника равен сумме площадей поверхности параллелепипедов с ребрами 4, 2, 1 и 2, 4, 4:

Площадь поверхности параллелепипеда равна:

$$S = 2(ab + bc + ac)$$

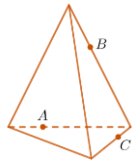
$$S = S_1 + S_2 = 2(4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1) + 2(4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4) =$$

$$= 2(8 + 4 + 2) + 2(16 + 8 + 8) = 32 + 64 = 96$$



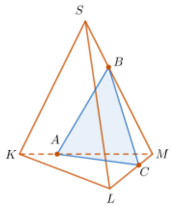
№11.

Плоскость, проходящая через точки *A*, *B* и *C*, рассекает тетраэдр на два многогранника (см. рис.). Сколько вершин у получившегося многогранника с большим числом граней?



Ответ: 6

У многогранника с большим числом граней количество вершин равно 6 (A, B, C,K, L, S).



№12.

К правильной шестиугольной призме с ребром основания 1 приклеили правильную шестиугольную пирамиду с ребром основания 1 так, что основания совпали. Сколько граней у получившегося многогранника (невидимые рёбра на рисунке не изображены)?

Ответ: 13

Зная, что в шестиугольной пирамиде 7 граней, а в шестиугольной призме 8 граней, но так как две грани в основании совпадают получаем: 7 + 8 − 2 = 13.

№13.

Пирамида Хеопса имеет форму правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 220 м, а высота — 104 м. Сторона основания точной музейной копии этой пирамиды равна 44 см. Найдите высоту музейной копии. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 20,8

Точная копия подобна оригиналу, значит отношения сторон и высот пирамид будут равны.

Отношение сторон:

$$\frac{220 \text{ м}}{44 \text{ см}} = \frac{22000 \text{ см}}{44 \text{ см}} = 500$$

Отношение высот:

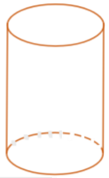
$$\frac{104 \text{ м}}{h \text{ см}} = 500$$

отсюда

$$h = \frac{104 \text{ м}}{500} = \frac{10400 \text{ см}}{500} = 20{,}8 \text{ см}$$

№14.

Высота бака цилиндрической формы равна 40 см, а площадь его основания равна 150 квадратным сантиметрам. Чему равен объём этого бака (в литрах)? В одном литре 1000 кубических сантиметров.



Ответ: 6

Объём цилиндра равен $V = \pi R^2 H$, где $\pi R^2 = 150 \text{ см}^2$ — площадь основания.

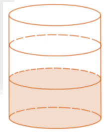
Следовательно, объём бака равен

$$V = 150 \cdot 40 = 6000 \text{ см}^3$$

Переведём 6000 см^3 в литры и получим 6 литров.

№15.

В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 128 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 8 раз больше первого? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 2

Так как диаметр второго сосуда в 8 раз больше, тогда площадь основания больше в 64 раза.

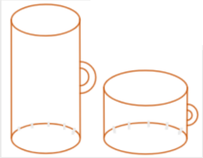
Для того, чтобы объем остался неизменным нужно, чтобы высота изменилась в 64 раза.

Следовательно,

$$\frac{128}{64} = 2$$

№16.

Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка в полтора раза ниже второй, а вторая вдвое шире первой. Во сколько раз объём второй кружки больше объёма первой?



Ответ: 6

Поскольку первая кружка ниже второй, следовательно, высота второй кружки в 1,5 раза больше первой. Следовательно, объем увеличится в 1,5 раза.

Так как вторая кружка в 2 раза шире, значит, радиус увеличится в 2 раза.

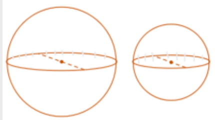
Следовательно, объем увеличится в 4 раза.

Так как объем увеличивается и в 1,5 раза, и в 4 раза, следовательно, объем увеличивается в 6 раз.

Значит, объём второй кружки в 6 раз больше объёма первой.

№17.

Однородный шар диаметром 3 см имеет массу 162 грамма. Чему равна масса шара, изготовленного из того же материала, с диаметром 2 см? Ответ дайте в граммах.



Ответ: 48

$$\frac{d_б}{d_м} = \frac{3}{2} = k$$

$$\frac{V_б}{V_м} = k^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

$$\frac{162}{m_м} = \frac{27}{8}$$

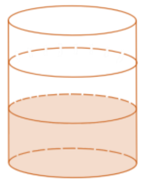
$$27m_м = 162 \cdot 8$$

$$27m_м = 1296$$

$$m_м = \frac{1296}{27} = 48$$

№18.

В бак, имеющий форму цилиндра, налито 10 л воды. После полного погружения в воду детали, уровень воды в баке поднялся в 1,6 раза. Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах, зная, что в одном литре 1000 кубических сантиметров.

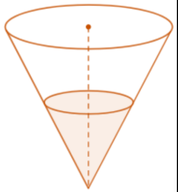


Ответ: 6000

Объем детали равен объему вытесненной ею жидкости. После погружения детали в воду объём стал равен $10 \cdot 1{,}6 = 16$ литров, поэтому объём детали равен $16 - 10 = 6$ л $= 6000$ см^3.

№19.

В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{4}{5}$ высоты. Объём сосуда 2000 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.



Ответ: 1024

Уровень жидкости занимает $\frac{4}{5}$ высоты, следовательно

$$\frac{V_м}{V_б} = k^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

$$\frac{V_м}{2000} = \frac{64}{125}$$

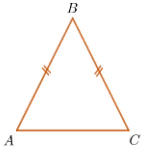
$$125V_м = 2000 \cdot 64$$

$$125V_м = 128000$$

$$V_м = \frac{128000}{125} = 1024$$

№1.

В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 16, площадь треугольника равна 48. Найдите длину боковой стороны AB.

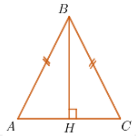


Ответ: 10

Опустим высоту BH и найдем ее высоту:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH \Leftrightarrow 48 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot BH$$

$$48 = 8 \cdot BH \Leftrightarrow BH = \frac{48}{8} = 6$$

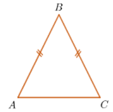


Значит, сторону треугольника можно найти по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике ABH:

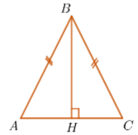
$AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

№2.

В треугольнике ABC известно, что AB=BC=20, AC=32. Найдите площадь треугольника ABC.



Ответ: 192



1 способ: опустим высоту BH. Тогда

$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{(20-16)(20+16)}$
$= \sqrt{4 \cdot 36} = 2 \cdot 6 = 12$

Следовательно, площадь треугольника ABC будет равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 32 = 192$$

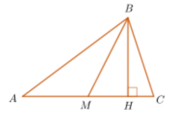
2 способ: найдем площадь треугольника по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+20+32}{2} = 36$$

$S = \sqrt{36(36-20)(36-20)(36-32)} =$
$\sqrt{36 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 4} = 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 192$

№3.

В треугольнике ABC сторона AC = 36, BM — медиана, BH — высота, BC=BM. Найдите длину отрезка AH.



Ответ: 27

BM — медиана треугольника ABC. Следовательно,

$$AM = CM = \frac{AC}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

По условию задачи $BC = BM$. Значит, треугольник BCM равнобедренный.

BH — высота треугольника BCM (равнобедренный). Вспомним, что в равнобедренном треугольнике высота, опущенная из вершины треугольника к его основанию, является медианой и биссектрисой. Следовательно,

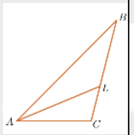
$$MH = CH = \frac{CM}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Тогда длину отрезка AH можно найти следующим образом:

$$AH = AM + MH = 18 + 9 = 27$$

№4.

В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, угол ALC равен 78°, угол ABC равен 52°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 76

Сумма смежных углов равна 180°. Тогда $\angle ALB + \angle ALC = 180°$

$$\angle ALB = 180° - 78° = 102°$$

Сумма углов в треугольнике равна 180°. Следовательно, найдем $\angle BAL$ в треугольнике ABL: $\angle BAL + \angle ABL + \angle BLA = 180°$

$$\angle BAL = 180° - \angle ABL - \angle BLA = 180° - 52° - 102° = 26°$$

AL – биссектриса в угол BAC. Тогда $\angle BAL = \angle LAC = 26°$

Сумма углов в треугольнике равна 180°. Следовательно, найдем $\angle ACL$ в треугольнике ALC:

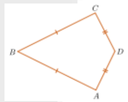
$$\angle ACL + \angle LAC + \angle ALC = 180°$$

$$\angle ACL = 180° - \angle LAC - \angle ALC = 180° - 26° - 78° = 76°$$

$$\angle ACL = \angle ACB = 76°$$

№5.

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC$, $AD = CD$, $\angle B = 32°$, $\angle D = 94°$. Найдите величину угла A. Ответ дайте в градусах.

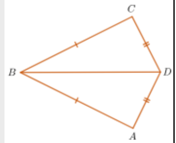


Ответ: 117

Проведем диагональ BD. Треугольник BCD равен треугольнику BAD (по трем сторонам). Следовательно, $\angle A = \angle C$.

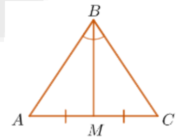
Тогда

$$\angle A = \angle C = \frac{360° - \angle B - \angle D}{2} = \frac{360° - 32° - 94°}{2} = \frac{234°}{2}$$
$$= 117°$$



№6.

В треугольнике ABC угол B равен 120°. Медиана делит угол B пополам и равна 29. Найдите длину стороны AB.



Ответ: 58

Медиана делит угол B пополам. Следовательно, $\angle ABM = 60°$, а $\angle AMB = 90°$ (т.к. медиана делит угол B пополам, значит, она является биссектрисой этого угла. Соответственно, треугольник ABC равнобедренный и BM – высота треугольника).

Треугольник ABM прямоугольный. Заметим, что $\angle ABM = 60°$, следовательно $\angle BAM = 30°$.

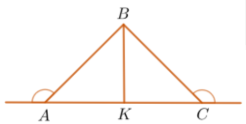
Вспомним свойство, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Получим, что в прямоугольном треугольнике ABM $\angle BAM = 30°$ и катет BM лежит напротив данного угла. Тогда

$$BM = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow 29 = \frac{1}{2}AB$$

$$AB = 58$$

№7.

В треугольнике ABC внешние углы при вершинах A и C равны 150°, AB = 42. Найдите длину биссектрисы BK.



Ответ: 21

Внешние углы при вершинах A и C равны 150°, тогда углы A и C в треугольнике равны 180° - 150° = 30°.

Получаем, что в треугольнике ABC углы при основании равны. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный. Тогда, биссектриса BK является высотой в треугольнике ABC.

Треугольник ABK прямоугольный. Заметим, что $\angle BAK = 30°$.

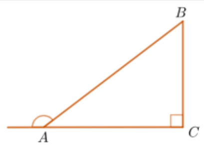
Вспомним свойство, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Тогда

$$BK = \frac{1}{2}AB$$

$$BK = \frac{1}{2} \cdot 42 = 21$$

№8.

В прямоугольном треугольнике ABC внешний угол при вершине A равен 150°. Катет BC = 27. Найдите длину гипотенузы AB.



Ответ: 54

Сумма смежных углов равна 180°. Тогда

$$\angle BAC = 180° - 150° = 30°$$

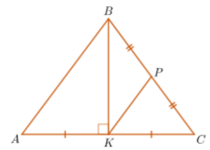
Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. В нем катет BC лежит напротив угла в 30°. Тогда, катет BC будет равен половине гипотенузе AB.

$$BC = \frac{1}{2}AB$$

$$AB = 2BC = 2 \cdot 27 = 54$$

№9.

В равнобедренном треугольнике ABC основание AC = 30, высота BK, проведённая к основанию, равна 8. Точка P — середина стороны BC. Найдите длину отрезка KP.



Ответ: 8,5

В равнобедренном треугольнике ABC высота BK является медианой. Тогда, AK = CK = 15. Рассмотрим прямоугольный треугольник BKC. По теореме Пифагора:

$$BK^2 + CK^2 = BC^2$$

$$8^2 + 15^2 = BC^2$$

$$64 + 225 = BC^2$$

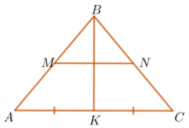
$$BC^2 = 289 \Rightarrow BC = 17$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник BKC. Вспомним, что медиана, проведенная из прямого угла к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Тогда

$$KP = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 17 = 8.5$$

№10.

В равнобедренном треугольнике ABC медиана BK=3, боковая сторона BC=5. Найдите длину отрезка MN, если известно, что он соединяет середины боковых сторон.



Ответ: 4

Рассмотрим треугольник BCK, где BC - гипотенуза, BK – катет.
По теореме Пифагора

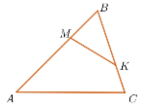
$$KC = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{16} = 4$$

KC=AK=4 (т.к. BK – медиана)
AC=4+4=8
MN – средняя линия треугольника и равна половине основания AC

$$MN = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

№11.

В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и K соответственно так, что $BM{:}AB$=1:2, а $BK{:}BC$=4:5. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади треугольника MBK?



Ответ: 2,5

Пусть $BM = x$, тогда $AB = 2x$. Пусть $BK = 4y$, тогда $BC = 5y$.
Площадь треугольника можно найти по формуле: $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$. Применим данную формулу для треугольников ABC и MBK:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle B$$

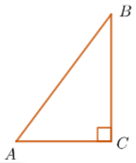
$$S_{MBK} = \frac{1}{2} \cdot MB \cdot BK \cdot \sin\angle B$$

Определим во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади треугольника MBK:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MBK}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle B}{\frac{1}{2} \cdot MB \cdot BK \cdot \sin\angle B} = \frac{AB \cdot BC}{MB \cdot BK} = \frac{AB}{MB} \cdot \frac{BC}{BK} = \frac{2x}{x} \cdot \frac{5y}{4y} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

№12.

В треугольнике ABC угол C равен 90°, AB=20, AC=16. Найдите cos B.



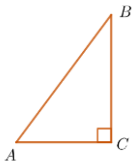
Ответ: 0,6

Косинус – отношение прилежащего катета к гипотенузе.

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{AB} = \frac{\sqrt{20^2 - 16^2}}{20} = \frac{12}{20} = 0.6$$

№13.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , AB=25, AC=7. Найдите sin A.



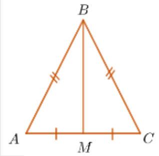
Ответ: 0,96

Синус – отношение противолежащего катета к гипотенузе.

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{AB} = \frac{\sqrt{25^2 - 7^2}}{25} = \frac{24}{25} = 0.96$$

№14.

В равнобедренном треугольнике ABC медиана BM, проведённая к основанию, равна 42, а tg A=$\frac{21}{20}$. Найдите длину боковой стороны треугольника ABC.
.



Ответ: 58

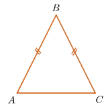
Так как треугольник ABC равнобедренный, то медиана BM является медианой, биссектрисой и высотой. Таким образом, треугольник ABM — прямоугольный. Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Имеем:

$$tg\, A = \frac{BM}{AM} \Leftrightarrow \frac{21}{20} = \frac{42}{AM} \Leftrightarrow AM = 40$$

$$AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = 58$$

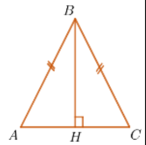
№15.

В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона AB=10, sin A=$\frac{4}{5}$.Найдите площадь треугольника ABC.
.



Ответ: 48

Опустим высоту BH. Тогда, рассмотрим прямоугольный треугольник ABH



$$\sin\angle A = \frac{BH}{AB} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{BH}{10}$$

$$5 \cdot BH = 40 \Leftrightarrow BH = 8$$

По теореме Пифагора: $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$$10^2 = AH^2 + 8^2$$

$$100 = AH^2 + 64$$

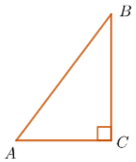
$$AH^2 = 100 - 64 = 36 \Leftrightarrow AH = 6$$

Получаем, что основание треугольника ABC равно 12.
Следовательно, площадь треугольника ABC будет равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48$$

№16.

В треугольнике ABC угол C равен 90 , AB=5, sin A = 0, 28. Найдите AC.



Ответ: 4,8

Синус угла равен отношению противолежащего катета BC к гипотенузе AB: $\sin A = \frac{BC}{AB}$.

$$0{,}28 = \frac{BC}{5} \Leftrightarrow \frac{28}{100} = \frac{BC}{5}$$

$$100 \cdot BC = 140$$

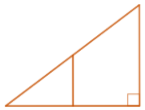
$$BC = \frac{140}{100} = 1{,}4$$

Из теоремы Пифагора следует

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 1.4^2} = \sqrt{25 - 1.96} = 4.8$$

№17.

Катет прямоугольного треугольника равен 12, одна из средних линий равна 2,5. Найдите гипотенузу этого треугольника.



Ответ: 13

Средняя линия равна половине основания треугольника. Тогда, катет, лежащий напротив средней линии, равен

$$2{,}5 \cdot 2 = 5$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник. По теореме Пифагора:

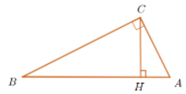
$$12^2 + 5^2 = c^2$$

$$144 + 25 = c^2$$

$$c^2 = 169 \Rightarrow c = 13$$

№18.

В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, BC = 8, sin$A$ = 0,5. Найдите длину отрезка BH.



Ответ: 4

Воспользуемся свойством углов в прямоугольном треугольнике:

$$\sin\angle A = \cos\angle B$$

Распишем $\cos\angle B$ в прямоугольном треугольнике BCH:

$$\cos\angle B = \frac{BH}{BC}$$

Тогда

$$\sin\angle A = \cos\angle B = \frac{BH}{BC}$$

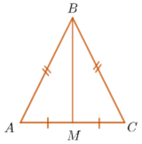
$$0{,}5 = \frac{BH}{8}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{BH}{8}$$

$$2 \cdot BH = 8 \Leftrightarrow BH = 4$$

№19.

В треугольнике каждая из двух сторон равна 13, а третья сторона равна 24. Найдите длину медианы, проведённой к третьей стороне треугольника



Ответ: 5

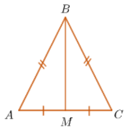
Каждая из двух сторон равна 13, следовательно, треугольник равнобедренный. Значит, медиана является высотой. Медиана делит основание пополам, тогда одна из половин равна 12.

Обозначим за x длину медианы. По теореме Пифагора:

$$12^2 + x^2 = 13^2$$
$$144 + x^2 = 169$$
$$x^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow x = 5$$

№20.

В треугольнике ABC известно, что AB = BC, медиана BM равна 15. Площадь треугольника ABC равна 120. Найдите длину стороны AB



Ответ: 17

В треугольнике ABC известно, что AB = BC, следовательно, треугольник равнобедренный. Медиана BM является высотой. Обратимся к формуле площади треугольника: $S = \frac{1}{2} h \cdot a$, где h – высота треугольника, a – основание треугольника.

$$120 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot a \Leftrightarrow 120 = 7{,}5 \cdot a$$
$$a = \frac{120}{7{,}5} = \frac{1200}{75} = \frac{48}{3} = 16$$

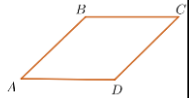
Рассмотрим треугольник ABM: сторона BM = h = 15, сторона $AM = \frac{AC}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

Тогда по теореме Пифагора найдем гипотенузу AB треугольника ABH:

$AB^2 = BM^2 + AM^2 \Leftrightarrow AB^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \Leftrightarrow AB = 17$

№21.

В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC в два раза больше стороны AB и $\angle ACD = 21°$. Найдите угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



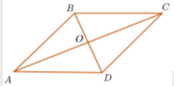
Ответ: 79,5

Пусть точка пересечения диагоналей — точка O. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, откуда $AO = OC = AB = CD$.

Поскольку $OC = CD$, треугольник COD — равнобедренный, следовательно,

$$\angle COD = \angle CDO = \frac{180° - \angle ACD}{2} = \frac{159°}{2} = 79{,}5°$$

Угол COD является искомым углом между диагоналями параллелограмма, так как он острый.



№22.

Стороны параллелограмма равны 40 и 80. Высота, опущенная на меньшую сторону, равна 60. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.

Ответ: 30

Пусть x — искомая высота. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, опущенную на это основание. Вычислим площадь параллелограмма двумя способами:

$$S = 40 \cdot 60 = 2400$$
$$S = 80 \cdot x$$
$$2400 = 80 \cdot x$$

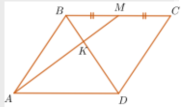
Значит,

$$x = \frac{2400}{80} = 30$$

№23.

В параллелограмме ABCD отмечена точка M — середина стороны BC. Отрезки BD и AM пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка BK, если BD = 18

.



Ответ: 6

Пусть BM = x, тогда BM = CM = x. Так как точка M – середина стороны BC, то $BC = 2 \cdot BM = 2x$

Треугольник MKB подобен треугольнику AKD (по двум углам: $\angle BKM = \angle AKD$ и $\angle MBK = \angle KDA$). Следовательно,

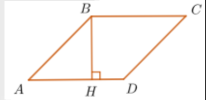
$$\frac{BK}{KD} = \frac{BM}{AD} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$
$$KD = 2BK$$

Заметим, что $BD = BK + DK = BK + 2BK = 3BK$.Отсюда получим, что $BD = 3BK$

$$BK = \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3} \cdot 18 = 6$$

№24.

Найдите площадь ромба, если его высота равна 3, а острый угол равен 30°.



Ответ: 18

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABH, катет BH равен 3 и лежит напротив угла, который равен 30°. Следовательно, сторона ромба равна 6 (как гипотенуза к катет, лежащий против угла 30° в прямоугольном треугольнике).

Найдем площадь ромба по формуле

$$S = a^2 \cdot \sin\alpha = 6^2 \cdot \sin 30° = 36 \cdot \frac{1}{2} = 18$$

№25.

Ромб и квадрат имеют равные стороны. Найдите площадь ромба, если его острый угол равен 30°, а площадь квадрата равна 100.

Ответ: 50

Площадь квадрата вычисляется по формуле: $S = a^2$. Следовательно, $a = \sqrt{S} = \sqrt{100} = 10$

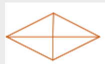
Площадь ромба вычисляется по формуле: $S = a^2 \cdot \sin\alpha$.

Таким образом:

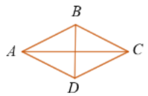
$$S = a^2 \cdot \sin\alpha = 10^2 \cdot \sin 30° = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

№26.

Сумма двух углов ромба равна 120°, а его меньшая диагональ равна 30. Найдите периметр ромба



Ответ: 120



Сумма двух углов ромба равна 120°, значит, каждый угол равен 120° : 2 = 60°. Следовательно, $\angle A = \angle C = 60°$

Сумма двух остальных углов ромба равна 360° − 120° = 240°, значит, каждый из них равен 240° : 2 = 120°.

$$\angle B = \angle D = 120°$$

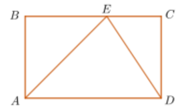
Рассмотрим треугольник ABD. Меньшая диагональ BD ромба лежит напротив меньшего угла ромба 60°. Так как ABCD – ромб, то AB = AD (так как все стороны ромба равны). Получим, что треугольник ABD является равнобедренным. В равнобедренном треугольнике ABD углы при основании равны ($\angle ABD = \angle ADB$) и $\angle A = 60°$, значит, $\angle ABD = \angle ADB = \frac{180° - 60°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$

Получим, что $\angle ABD = \angle ADB = \angle A = 60°$, следовательно, треугольник ABD является равносторонним. Значит, $AB = AD = BD = 30$. Таким образом, периметр ромба равен

$$P_{ABCD} = 4BD = 30 \cdot 4 = 120$$

№27.

На стороне BC прямоугольника ABCD, у которого AB=8 и AD=14, отмечена точка E так, что треугольник ABE равнобедренный. Найдите ED.

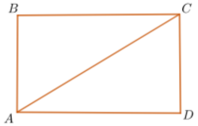


Ответ: 10

Треугольник ABE равнобедренный, следовательно, $BE = AB = 8$. Найдём длину отрезка EC=BC – BE=AD-BE=14-8=6. По теореме Пифагора:

$$ED = \sqrt{EC^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

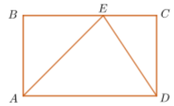
№28.
Площадь прямоугольника ABCD равна 125, сторона AB=10. Найдите тангенс угла tg CAD.



Ответ: 0,8

Площадь прямоугольника равна произведению его сторон, следовательно,
$$S = AD \cdot 10 = 125$$
Поэтому AD = 12,5. Далее, имеем:
$$tg\,\angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{10}{12.5} = 0.8$$

№29.
На стороне BC прямоугольника $ABCD$, у которого AB = 70 и AD = 94, отмечена точка E так, что $\angle EAB$=45°. Найдите ED.



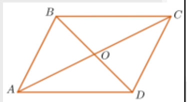
Ответ: 74

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABE. Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°. Следовательно,
$$\angle BEA = 90° - \angle EAB = 90° - 45° = 45°$$
Значит, прямоугольный треугольник ABE равнобедренный. Поэтому AB = BE = 70.
Найдем отрезок CE:
$$CE = BC - BE = AD - BE = 94 - 70 = 24$$
Рассмотрим прямоугольный треугольник CED. По теореме Пифагора:
$$CE^2 + CD^2 = ED^2$$
$$24^2 + 70^2 = ED^2$$
$$576 + 4900 = ED^2$$
$$ED^2 = 5476 \Rightarrow ED = 74$$

№30. Обе диагонали параллелограмма равны 15. Одна из сторон параллелограмма равна 9. Найдите сторону параллелограмма, соседнюю с данной.
Ответ: 12

Поскольку диагонали параллелограмма равны, то параллелограмм является прямоугольником. Тогда по теореме Пифагора найдем вторую сторону прямоугольника:
$$\sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$$

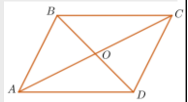
№31.
В параллелограмме $ABCD$ диагонали являются биссектрисами его углов, AB = 40, AC = 48. Найдите BD.



Ответ: 64

Заметим, что если диагонали параллелограмма делят содержащие их углы пополам, то параллелограмм является ромбом.
В ромбе ABCD диагонали AC и BD перпендикулярны. Тогда получим прямоугольный треугольник AOB, где AB = 40, AO = 24.
По теореме Пифагора найдем катет BO:
$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{40^2 - 24^2} = \sqrt{1600 - 576} = \sqrt{1024} = 32$$
Тогда, $BD = 2 \cdot BO = 2 \cdot 32 = 64$

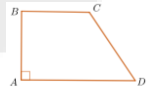
№32.
В параллелограмме $ABCD$ диагонали перпендикулярны. Сумма углов A и C равна 120°, AB = 24. Найдите BD.



Ответ: 24

Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то это ромб. Сторона ромба AB = 24, а сумма противоположных углов 120°. Учитывая, что в ромбе противоположные углы равны, то угол A = 60°. Рассмотрим треугольник ABD. Меньшая диагональ BD ромба лежит напротив меньшего угла ромба 60°. Так как ABCD – ромб, то AB = AD (так как все стороны ромба равны). Получим, что треугольник ABD является равнобедренным. В равнобедренном треугольнике ABD углы при основании равны ($\angle ABD = \angle ADB$) и $\angle A$ = 60°, значит,
$$\angle ABD = \angle ADB = \frac{180° - 60°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$
Получим, что $\angle ABD = \angle ADB = \angle A = 60°$, следовательно, треугольник ABD является равносторонним.
Значит, $AB = AD = BD = 24$

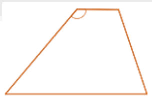
№33.
В прямоугольной трапеции ABCD с основаниями BC и AD угол BAD прямой, AB=4, BC=CD=5 (см. рисунок). Найдите среднюю линию трапеции.



Ответ: 6,5

Для того, чтобы найти среднюю линию трапеции необходимо знать длину оснований, найдём AD.
Проведём высоту CH к AD.
$$HD = \sqrt{25 - 16} = 3$$
Найдем AD:
$$AD = 5 + 3 = 8$$
Средняя линия трапеции равна полусумме оснований:
$$\frac{5 + 8}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

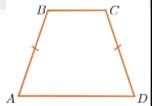
№34.
Основания трапеции равны 8 и 16, боковая сторона, равная 6, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.



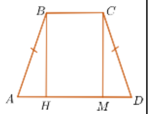
Ответ: 36

Угол в 150° образует боковая сторона и меньшее основание, тогда с большим основанием эта сторона образует угол 30° (так как сумма углов, прилегающих к боковой стороне трапеции равна 180 градусов). Проведем высоту трапеции и рассмотрим прямоугольный треугольник.
Вспомним свойство, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Получим, что в прямоугольном треугольнике высота трапеции лежит напротив данного угла. Тогда
$$h = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$
По формуле площади трапеции находим
$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h = \frac{8 + 16}{2} \cdot 3 = \frac{24}{2} \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36$$

№35.
Основания равнобедренной трапеции равны 4 и 16, боковая сторона равна 7.5. Найдите высоту трапеции.

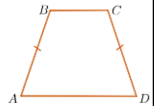


Ответ: 4,5

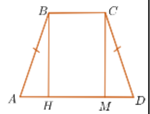


Опустим высоты к основанию трапеции.
Заметим, что BC = MH = 4. Тогда,
$$AH = MD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{16 - 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$
Рассмотрим прямоугольный треугольник ABH. По теореме Пифагора:
$$AH^2 + BH^2 = AB^2$$
$$6^2 + BH^2 = 7.5^2$$
$$36 + BH^2 = 56.25$$
$$BH^2 = 20.25 \Rightarrow BH = 4.5$$

№36.
В равнобедренной трапеции одно из оснований равно 25, а другое — 7. Высота трапеции равна 4.5. Найдите тангенс острого угла трапеции.



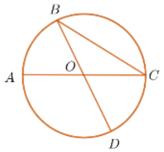
Ответ: 0,5



Опустим высоты к основанию трапеции.
Заметим, что BC = MH = 7. Тогда,
$$AH = MD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{25 - 7}{2} = \frac{18}{2} = 9$$
Рассмотрим прямоугольный треугольник ABH. Тангенс угла – отношение противолежащего катета к прилежащему.
$$tg\,\angle A = \frac{BH}{AH} = \frac{4.5}{9} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} = 0.5$$

№37.

Отрезки AC и BD - диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 54° . Найдите величину угла AOD. Ответ дайте в градусах.

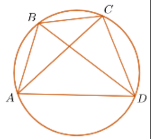


Ответ: 72

Угол *ACB* — вписанный, опирается на дугу *AB*, поэтому он равен половине дуги *AB*, то есть величина дуги *AB* равна $2 \cdot 54° = 108°$.
Поскольку *BD* — диаметр, градусная мера дуги *BAD* равна 180°. Градусная мера дуги *AD* равна разности градусных мер дуг *BAD* и *AB:* $180° - 108° = 72°$.
Угол *AOD* — центральный, поэтому он равен дуге, на которую опирается, следовательно, он равен 72°.

№38.

Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 71°, угол CAD равен 61°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



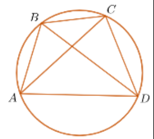
Ответ: 132

Угол *CAD* и угол *CBD* — вписанные углы, опирающиеся на одну дугу CD, а значит, они равны 61°. Следовательно:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 71° + 61° = 132°$$

№39.

Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 70°, угол CAD равен 49°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

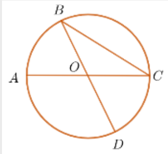


Ответ: 21

Заметим, что $\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC$.
Но $\angle DBC = \angle CAD$, поскольку они опираются на одну и ту же дугу *CD*.
Тогда $\angle ABD = \angle ABC - \angle CAD = 70° - 49° = 21°$.

№40.

Отрезки AC и BD— диаметры окружности с центром O. Угол AOD равен 98° Найдите величину угла ACB. Ответ дайте в градусах.

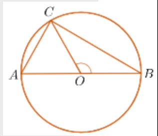


Ответ: 41

Угол *AOD* — центральный, поэтому он равен градусной мере дуги AD, на которую опирается, следовательно, дуга AD равна 98°.
Поскольку *BD* — диаметр, градусная мера дуги *BAD* равна 180°. Градусная мера дуги *AB* равна разности градусных мер дуг *BAD* и *AD:* $180° - 98° = 82°$.
Угол *ACB* — вписанный, опирается на дугу *AB*, поэтому он равен половине дуги *AB*, то есть величина угла ACB равна 82°:2 = 41°.

№41.

На окружности с центром O и диаметром AB отмечена точка C так, что угол COB равен 120°, AC=11. Найдите диаметр окружности.



Ответ: 22

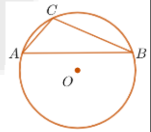
Стороны *AO* = *OC* как радиусы окружности. Следовательно, треугольник AOC равнобедренный ($\angle CAO = \angle ACO$).
Угол *COA* в нем равен 60° как смежный с углом *COB* ($\angle COA = 180° - \angle COB = 180° - 120° = 60°$).
Тогда,

$$\angle CAO = \angle ACO = \frac{180° - 60°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

Следовательно, треугольник *COA* — равносторонний.
Тогда диаметр *AB* = 2*AC* = 22.

№42.

Хорда *AB* делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 3 : 5. Под каким углом видна эта хорда из точки *C*, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.



Ответ: 112,5

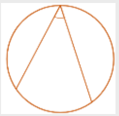
Из точки *C* хорда *AB* видна под углом *ACB*. Пусть большая часть окружности равна 5x, тогда меньшая равна 3*x*.

$$5x + 3x = 360°$$
$$8x = 360°$$
$$x = 45°$$

Значит, меньшая дуга окружности равна 135°, а большая — 225°. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит, опирающийся на большую дугу угол *ACB* равен 112.5°.

№43.

Найдите вписанный угол , опирающийся на дугу , которая составляет $\frac{11}{36}$ длины окружности. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 55

Найдем градусную меру дуги, на которую опирается угол:

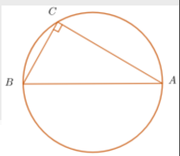
$$\frac{11}{36} \cdot 360° = 11 \cdot 10° = 110°$$

Вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается. Следовательно, искомый угол равен

$$\frac{1}{2} \cdot 110° = 55°$$

№44.

На окружности радиуса 3 отмечена точка C. Отрезок AB – диаметр окружности, AC=$2\sqrt{5}$. Найдите BC.



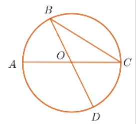
Ответ: 4

Вписанный угол ACB, опирающийся на диаметр AB — прямой, поэтому треугольник *ABC* — прямоугольный. Его гипотенуза *AB* равна 6 (так как радиус окружности равен 3, AB – диаметр), поэтому:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{36 - 20} = \sqrt{16} = 4$$

№45.

В окружности с центром O отрезки AC и BD — диаметры. Центральный угол AOD равен 112°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

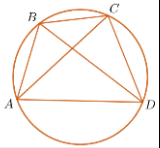


Ответ: 34

Угол *AOD* — центральный, он равен дуге, на которую опирается, поэтому дуга *AD* = 112°.
Дуга *DAB* равна 180° (т.к. BD – диаметр окружности), поэтому дуга *AB* равна 180° – 112° = 68°. Опирающийся на нее вписанный угол *ACB* равен ее половине, то есть 34°.

№46.

Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 70°, угол CAD равен 49°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 21

Углы CAD и DBC – вписанные углы, опирающиеся на одну дугу CD. Следовательно,

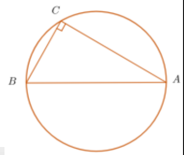
$$\angle CAD = \angle DBC = 49°$$

Тогда

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$$
$$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC$$
$$\angle ABD = 70° - 49° = 21°$$

№47.

На окружности радиуса 25 отмечена точка C. Отрезок AB – диаметр окружности, AC =15 . Найдите cos∠BAC.



Ответ: 0,3

Угол, опирающийся на диаметр — прямой, следовательно, треугольник ABC прямоугольный.

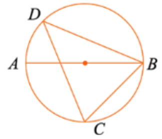
AB – диаметр окружности, следовательно, AB = 2R=2·25 = 50

Косинус угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе, найдём его:

$$\cos\angle BAC = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{50} = \frac{30}{100} = 0.3$$

№48.

На окружности по разные стороны от диаметра AB отмечены точки D и C. Известно, что $\angle DBA$ = 63°. Найдите угол DCB. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 27

Угол DBA — вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую он опирается. Следовательно, дуга $AD = 2\angle DBA = 2 \cdot 63° = 126°$.

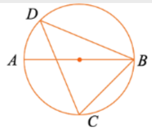
Диаметр AB делит окружность на две равные части, поэтому величина дуги ANB равна 180°. Откуда дуга DB = 180° − 126° = 54°.

Угол DCB — вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую он опирается, то есть равен

$$\frac{54°}{2} = 27°$$

№49.

На окружности по разные стороны от диаметра AB отмечены точки D и C. Известно, что $\angle DBA$ = 49°. Найдите угол DCB. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 41

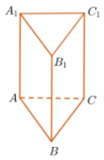
Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит, градусная мера дуги AD равна 98° (т.к. $\angle DBA$ = 49° - вписанный угол, опирающийся на дугу AD).

Градусная мера дуги AB равна 180°, следовательно, градусная мера дуги DB равна 180° − 98° = 82°. Тогда градусная мера вписанного угла DCB, опирающегося на дугу DB, равна

$$\angle DCB = \frac{82°}{2} = 41°$$

№1.

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 5, а высота этой призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите объём призмы $ABCA_1B_1C_1$.



Ответ: 18,75

В правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$:

$$AB = BC = AC = 5$$

Объём правильной треугольной призмы вычисляется по формуле:

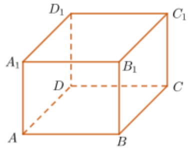
$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot h$$

где a — длина стороны основания призмы, h — высота призмы. Подставляя данные значения, получаем:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB^2 \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 5^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{4} \cdot 25 = \frac{75}{4} = 18.75$$

№2.

В прямоугольном параллелепипеде ABCDA1B1C1D1 рёбра CD, CB и диагональ CD1 равны соответственно 5, 6 и $\sqrt{29}$. Найдите объём параллелепипеда ABCDA1B1C1D1.



Ответ: 60

Рассмотрим прямоугольный треугольник CDD_1. Найдём высоту параллелепипеда DD_1:

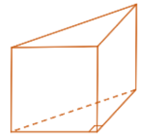
$$DD_1 = \sqrt{(CD_1)^2 - CD^2} = \sqrt{\left(\sqrt{29}\right)^2 - 5^2} = \sqrt{29 - 25} = \sqrt{4} = 2$$

Найдём объём параллелепипеда:

$$V = CD \cdot CB \cdot DD_1 = 2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$$

№3.

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3, а гипотенуза равна $\sqrt{34}$. Найдите объём призмы, если её высота равна 6.



Ответ: 45

$$V = Sосн \cdot h$$

В основании лежит прямоугольный треугольник, значит

$$Sосн = \frac{1}{2}ab$$

где a,b - катеты.

Найдем длину второго катета:

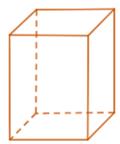
$$b = \sqrt{\left(\sqrt{34}\right)^2 - 3^2} = \sqrt{34 - 9} = \sqrt{25} = 5$$

Тогда

$$V = \frac{1}{2}ab \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 = 45$$

№4.

Два ребра прямоугольного параллелепипеда равны 8 и 2, а объём параллелепипеда равен 144. Найдите площадь поверхности этого параллелепипеда.



Ответ: 212

Объем прямоугольного параллелепипеда равен

$$V = abc$$

Знаем, что $a = 8, b = 2$ и $V = 144$, тогда

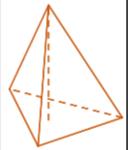
$$c = \frac{V}{ab} = \frac{144}{8 \cdot 2} = 9$$

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда равна

$$S = 2(ab + bc + ac) = 2(8 \cdot 2 + 2 \cdot 9 + 8 \cdot 9) = 2(16 + 18 + 72) = 2 \cdot 106 = 212$$

№5.

Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 3, а высота равна $6\sqrt{3}$.



Ответ: 13,5

Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

где S — площадь основания, а h — высота пирамиды. Найдём площадь равностороннего треугольника, лежащего в основании:

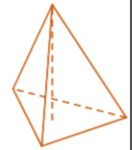
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Тогда объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 6\sqrt{3} = 13.5$$

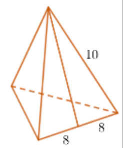
№6.

Стороны основания правильной треугольной пирамиды равны 16, а боковые рёбра равны 10. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Ответ: 144

Найдём апофему пирамиды:



$$h = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$$

Найдём площадь одной боковой грани:

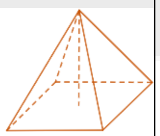
$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 = 8 \cdot 6 = 48$$

Так как боковую поверхность образуют три такие грани, то площадь боковой поверхности пирамиды равна:

$$3 \cdot 48 = 144$$

№7.

Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.



Ответ: 4

Объем пирамиды равен

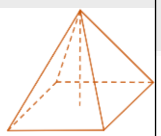
$$V = \frac{1}{3}Sh$$

где S — площадь основания, а h — высота пирамиды. Зная площадь основания, можно найти высоту:

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 16}{3 \cdot 4} = \frac{16}{4} = 4$$

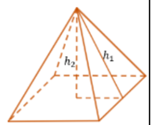
№8.

Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4, а боковое ребро равно $\sqrt{17}$.



Ответ: 16

С помощью теоремы Пифагора найдём высоту грани пирамиды (h_1):



$$h_1 = \sqrt{\left(\sqrt{17}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{17 - 4} = \sqrt{13}$$

Также с помощью теоремы Пифагора найдём высоту пирамиды (h_2):

$$h_2 = \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{13 - 4} = \sqrt{9} = 3$$

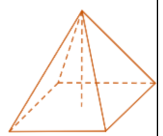
Найдём площадь основания пирамиды: $S_{осн} = 4 \cdot 4 = 16$

Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{осн}h_2 \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 3 = 16$$

№9.

Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а боковое ребро равно $3\sqrt{3}$.



Ответ: 36

Объем пирамиды можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3}S_{осн}h$. Площадь основания, равна: $S_{осн} = 6 \cdot 6 = 36$ так как в основании правильной четырёхугольной пирамиды лежит квадрат. Диагонали этого квадрата, соответственно, равны: $d = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$. Вычислим высоту пирамиды из прямоугольного треугольника.

В нем известна гипотенуза $3\sqrt{3}$ и один из катетов $\frac{d}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

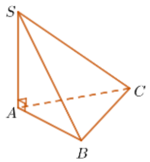
Получаем значение второго катета (высоты) из теоремы Пифагора:

$$h = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{27 - 18} = \sqrt{9} = 3$$

и объем пирамиды, равен: $V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3 = 36$

№10.

В основании пирамиды лежит правильный треугольник ABC со стороной 4, а боковое ребро SA перпендикулярно основанию и равно $3\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды SABC.



Ответ: 12

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} h$$

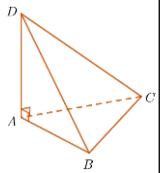
В основании правильной призмы лежит правильный треугольник, значит

$$S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 3\sqrt{3} = 4 \cdot 3 = 12$$

№11.

В треугольной пирамиде *ABCD* рёбра *AB*, *AC* и *AD* взаимно перпендикулярны. Найдите объём этой пирамиды, если *AB* = 5, *AC* = 24 и *AD* = 3.



Ответ: 60

Найдём площадь основания пирамиды:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 24 = 5 \cdot 12 = 60$$

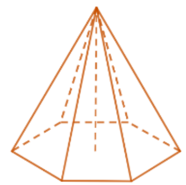
Теперь можем найти объём пирамиды *DABC*:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} h = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot AD$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 3 = 60$$

№12.

Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 14, боковые рёбра равны 25. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Ответ: 1008

Найдём апофему пирамиды:

$$l = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$$

Найдём площадь одной боковой грани:

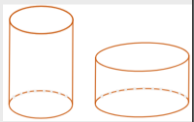
$$S = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 24 = 7 \cdot 24 = 168$$

Так как боковую поверхность образуют 6 таких граней, то площадь боковой поверхности пирамиды равна:

$$6 \cdot 168 = 1008$$

№13.

Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого цилиндра равны соответственно 6 и 9, а второго — 9 и 2. Во сколько раз объём первого цилиндра больше объёма второго?



Ответ: 2

Возьмем из справочных материалов формулу объема цилиндра:

$$V = \pi r^2 h$$

Запишем объем для обоих цилиндров:

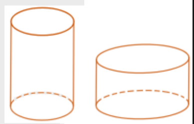
$$V_1 = \pi \cdot 6^2 \cdot 9$$
$$V_2 = \pi \cdot 9^2 \cdot 2$$

Тогда

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 9}{\pi \cdot 9^2 \cdot 2} = 2$$

№14.

Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого цилиндра равны соответственно 6 и 14, а второго — 7 и 3. Во сколько раз площадь боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго?



Ответ: 4

Площадь боковой поверхности цилиндра можно найти по формуле:

$$S = 2\pi R \cdot h$$

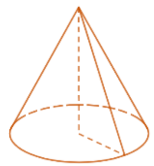
Здесь R - радиус окружности в основании цилиндра, h - высота цилиндра.

Тогда

$$S_1 = 2\pi R_1 h_1 = 2\pi \cdot 6 \cdot 14$$
$$S_2 = 2\pi R_2 h_2 = 2\pi \cdot 7 \cdot 3$$
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi \cdot 6 \cdot 14}{2\pi \cdot 7 \cdot 3} = 2 \cdot 2 = 4$$

№15.

Объём конуса равен 9π, а его высота равна 3. Найдите радиус основания конуса.



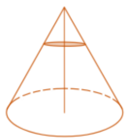
Ответ: 3

Найдём радиус основания конуса по формуле:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$
$$9\pi = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot 3$$
$$9\pi = \pi R^2$$
$$9 = R^2$$
$$R = 3$$

№16.

Объём конуса равен 135. Через точку, делящую высоту конуса в отношении 1:2, считая от вершины, проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объём конуса, отсекаемого от данного конуса проведённой плоскостью.



Ответ: 5

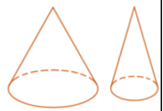
Отношение объемов конусов равно кубу их коэффициента подобия. Точка делит высоту в отношении 1:2, следовательно, высоты конусов относятся как 1:3, поэтому их объемы относятся как

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Следовательно, объем отсекаемого конуса равен 135 : 27 = 5.

№17.

Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 5 и 6, а второго — 2 и 3. Во сколько раз площадь боковой поверхности первого конуса больше площади боковой поверхности второго?



Ответ: 5

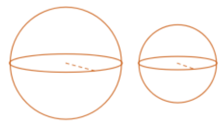
Площадь боковой поверхности конуса можно найти по формуле $S = \pi r l$ (есть в справочных материалах).

Тогда

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi r_1 l_1}{\pi r_2 l_2} = \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 5$$

№18.

Даны два шара с радиусами 5 и 1. Во сколько раз объём большего шара больше объёма меньшего?



Ответ: 125

Возьмем из справочных материалов формулу объема шара

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Запишем объем для обоих:

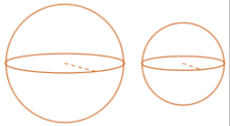
$$V_б = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{4}{3} \cdot 125\pi$$
$$V_м = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3} \pi$$

Тогда

$$\frac{V_б}{V_м} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 125\pi}{\frac{4}{3}\pi} = 125$$

№19.

Даны два шара с радиусами 14 и 2. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности другого?

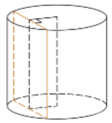


Ответ: 49

Площади поверхности шаров относятся как квадрат отношения их радиусов. Радиус большего шара в 7 раз больше радиуса меньшего, поэтому их площади относятся как $7^2 = 49$.

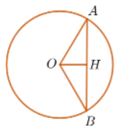
№20.

Радиус основания цилиндра равен 20, а его образующая равна 8. Сечение, параллельное оси цилиндра, удалено от неё на расстояния, равное 12. Найдите площадь этого сечения.



Ответ: 256

Рассмотрим сечение цилиндра плоскостью, параллельной основанию. Введём обозначения, как показано на рисунке. Рассмотрим прямоугольный треугольник AOH, по теореме Пифагора: $AH = \sqrt{AO^2 - OH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16$



Треугольники AOH и OHB — прямоугольные, OH — общая, стороны AO и OB равны как радиусы окружности, следовательно, треугольники равны по двум катетам, откуда $AH = HB = 16$. Значит, $AB = 2AH = 32$. Площадь сечения — площадь прямоугольника со сторонами 32 и 8:

$$S = 32 \cdot 8 = 256$$

№1. Вычеркните в числе 123456 три цифры так, чтобы получившееся трёхзначное число делилось на 27. В ответе укажите получившееся число.

Ответ: 135

Если число делится на 27, тогда оно делится на 9

Число делится на 9, тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Следовательно, сумма цифр получившегося числа должна делится на 9 (но если число делится на 9, то оно необязательно делится на 27, поэтому потребуется проверка).

Сумма цифр числа 123456 равна 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. Чтобы сумма цифр получившегося числа была равна 9, вычеркнем цифры, дающие в сумме 12: 6, 5 и 1. Получим число 234, оно не делится на 27. Тогда вычеркнем 2, 4 и 6, получим 135 — делится на 27.

№2. Вычеркните в числе 53164018 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 15. В ответе укажите ровно одно получившееся число.

Ответ: 53160 или 53640

Число делится на 15 тогда, когда оно одновременно делится на 3 и на 5.

Число делится на 3, если сумма цифр числа делится на 3.

Число делится на 5, если оно оканчивается на 0 или на 5.

На 5 число заканчиваться не может, чтобы число заканчивалось на 0, следует вычеркнуть две последние цифры 1, 8. Тогда получаем число 531640, из которого осталось вычеркнуть одну цифру так, чтобы сумма оставшихся делилась на три. Поскольку сумма цифр числа 531640 равна 19, можно вычеркнуть 4 или 1, получая: 53 160 или 53 640. Любое из этих чисел является ответом.

№3. Найдите четырёхзначное число, кратное 33, все цифры которого различны и нечётны.

Ответ: 3597, 3795, 9537,9735, 5379, 5973, 7359, 7953

Искомое число кратно 3 и 11.
Первое означает, что сумма цифр числа кратна 3.
Второе означает, что разность суммы цифр на четных местах и суммы цифр на нечетных местах кратна 11.
Все цифры числа нечетные и различные, поэтому составим из нечетных цифр (1, 3, 5, 7 и 9) комбинации из четырех, сумма которых кратна 3. Получим два набора: (1,3,5,9) и (3,5,7,9).
Проверим, есть ли в наборах пары цифр, суммы которых равны. Это обеспечит выполнение условия про кратность 11:
1,3,5,9 - необходимых пар нет
3,5,7,9 - есть пары 5,7 и 3,9. Их сумма 12, разность сумм 0. Составим числа так, чтобы числа из пары 5,7 были на четных местах, а из пары 3,9 - на нечетных и наоборот. Получаем:
3597, 3795, 9537, 9735, 5379, 5973, 7359, 7953 - любое из этих чисел является ответом.

№4. Найдите трёхзначное число, кратное 25, все цифры которого различны, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: 125,725,825,175,275,875

Так как число кратно 25, то оно может оканчиваться на 00, 25, 50 или 75.
00 не подходит, так как все цифры должны быть различны.
Возьмем первое трехзначное число 100. Оно нам не подходит, так как все цифры должны быть различны.
Рассмотрим число 125:

$$1^2 + 2^2 + 5^2 = 1 + 4 + 25 = 30$$

Получим, что сумма квадратов цифр равна 30, она делится на 3, но не делится на 9. Следовательно, число 125 нам подходит.
Рассмотрим число 150:

$$1^2 + 5^2 + 0^2 = 1 + 25 + 0 = 26$$

Получим, что сумма квадратов цифр равна 26, она не делится на 3, не делится на 9. Следовательно, число 125 нам не подходит.
Рассмотрим число 175:

$$1^2 + 7^2 + 5^2 = 1 + 49 + 25 = 75$$

Получим, что сумма квадратов цифр равна 75, она делится на 3, но не делится на 9. Следовательно, число 175 нам подходит.
Получаем числа: 125, 725, 825, 175, 275, 875 - любое из них является ответом.

№5. Найдите четырёхзначное число, кратное 15, произведение цифр которого больше 0, но меньше 25. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.
Ответ: 1125, 1215, 2115

Число кратно 15, значит, кратно 3 и 5.
Первое значит, что сумма его цифр кратна 3.
Второе - число оканчивается на 0 или на 5.
Так как произведение цифр больше 0, значит, цифры 0 в числе нет - число оканчивается на 5.
Произведение всех цифр числа кратно 5, так как в числе есть хотя бы одна цифра 5 (последняя). То есть произведение цифр числа может быть равно 5, 10, 15 и 20.

- Если произведение цифр равно 5, то единственное подходящее четырёхзначное число 1115 (сумма цифр 8). Но оно не кратно 3.
- Если произведение цифр 10, то число состоит из цифр 1, 1, 2 и 5 (сумма 9). Такое число будет кратно 3 - все условия соблюдаются. Подходящие числа: 1125, 1215, 2115.
- Если произведение 15, то число состоит из цифр 1, 1, 3 и 5 (сумма 10). Такое число не кратно 3.
- Если произведение 20, то число может состоять из цифр 1, 1, 4 и 5 (сумма 11) или 1, 2, 2 и 5 (сумма 10). Такие числа не кратны 3.

№6. Найдите пятизначное число, кратное 25, любые две соседние цифры которого отличаются на 2. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: 97575, 57575,53575,13575,97975,57975

Искомое число кратно 25, значит, может оканчиваться на 00, 25, 50 и 75.

По условию любые две соседние цифры числа отличаются на 2, значит подходит только 75.

Значит, число будет иметь вид “abc75”, где a,b,c - цифры, a≠0.

Значение c на 2 отличается от 7, значит это может быть 5 или 9.

Значение b на 2 отличается от 5 - это 7 или 3, или на 2 отличается от 9 - это только 7, так как 9 + 2 = 11 - уже не цифра. Аналогично с буквой a. Отобразим все варианты в виде таблицы:

<table>
<tr><td>9</td><td rowspan="2">7</td><td rowspan="4">5</td><td rowspan="6">7</td><td rowspan="6">5</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="2">3</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td rowspan="2">7</td><td rowspan="2">9</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
</table>

№7. Найдите пятизначное натуральное число, кратное 5, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: 21115 или 11125 или 12115 или 11215

Число делится на 5, если его последняя цифра делится на 5 (то есть равна 0 или 5). Но последняя цифра не может быть нулем, поскольку произведение цифр будет равно нулю и никогда не будет равно сумме цифр. Таким образом, данное число оканчивается на 5.
По условию сумма цифр равна произведению, то есть $a + b + c + d + e = abcde$. Максимальная возможная сумма 5 цифр равна 45, а минимальная 1, значит, произведение всех цифр не превосходит 45 и среди цифр нет нуля (иначе произведение будет 0, что противоречит условию с суммой).
Остается одна цифра 5. Значит, e=5. Далее, для простоты вычислений цифры c=d=1.
Получаем число: $ab115$
Предположим, что a = 1, b= 1: 11115

$$1 + 1 + 1 + 1 + 5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5$$

$9 = 5$ (это неверно).Следовательно, число 11115 не подходит.
Предположим, что a = 2, b= 1: 21115

$$2 + 1 + 1 + 1 + 5 = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5$$

$10 = 10$ (это верно).Следовательно, число 21115 подходит.
Заметим, что ещё подходят числа 11125 или 12115 или 11215.

№8. Найдите четырёхзначное натуральное число, кратное 11, сумма цифр которого на 1 меньше их произведения. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: 3311

Если хотя бы одна цифра в записи числа — ноль, то произведение цифр равно 0, а тогда их сумма равна 1. Единственное такое четырёхзначное число — 1000, но оно не кратно 11. Поэтому нулей среди цифр нет. Отсюда следует, что все цифры не меньше 1, и их сумма не меньше четырёх, а значит, произведение цифр не меньше пяти. Чтобы произведение было не меньше пяти хотя бы одна из цифр должна быть больше 4. Рассмотрим такие числа в порядке возрастания суммы их цифр.
Если сумма цифр равна 5, то число записывается одной двойкой и тремя единицами (это числа 1112, 1121, 1211, 2111). Произведение цифр равно 2, поэтому они не удовлетворяют условию.
Если сумма цифр равна 6, то число записывается одной тройкой и тремя единицами или двумя двойками и двумя единицами (это числа 1113, 1131, 1311, 3111, 1122, 1212, ...). Произведение цифр равно 3 или 4 соответственно, поэтому такие числа не удовлетворяют условию.
Если сумма цифр равна 7, то это число записывается тройкой, двойкой и двумя единицами (это числа 3211, 1123, 2113, 2311, 1132, 3112 ...). Произведение этих цифр равно 6, поэтому такие числа не удовлетворяют условию.
Если сумм цифр равна 8, то произведение должно быть равно 9. Это выполнено для чисел, записываемых двумя тройками и двумя единицами. Поскольку число 3311 кратно 11, оно и является искомым.

№9. Найдите трехзначное натуральное число, большее 500, которое делится на каждую свою цифру, все цифры которого различны и не равны нулю. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: 612, 624, 672, 735, 864 или 936
Число больше 500, значит, первая цифра может быть 5, 6, 7, 8 или 9.
При этом искомое число делится на каждую свою цифру, значит, в числе не встречается 0.
Если на первом месте стоит 5, то всё число должно делиться на 5.
Рассмотрим число 515. Оно делится на каждую свою цифру (515:5=103, 515:1 = 515). Данное число не подходит, так как не выполняется условие, что все цифры числа должны быть различны.
При рассмотрении чисел, которые начинаются на 5, мы всегда будем получать в его записи цифру 0 или не все цифры будут различны (Примеры: 505, 510, 515, 520, 525, 530, 535 и т.д.). Поэтому, число не может начинаться на 5.
Если на первом месте стоит 6, то всё число должно делиться на 6.
Рассмотрим число 612. Оно делится на каждую свою цифру (612:6=102, 612:1 = 612, 612: 2 = 306). Данное число подходит, так как выполняется условие, что все цифры числа должны быть различны и число делится на каждую свою цифру.
Заметим, что ещё подходят числа 624, 672, 735, 864 или 936.

№10. Найдите трёхзначное натуральное число, большее 500, которое при делении и на 3, и на 4, и на 5 даёт в остатке 2 и в записи которого использованы только две различные цифры. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ:662 или 722

Число имеет одинаковый остаток при делении на 3, 4 и 5, а, следовательно, при делении этого числа на 60, в остатке тоже будет 2. Таким образом, число имеет вид: 60n+2

При n=1,..,8: все числа меньше 500.

При n=9: 542. Три различные цифры.

При n=10: 602. Три различные цифры.

При n=11: 662.

Также подходит число 722.

№11. Найдите трёхзначное натуральное число, которое при делении и на 4, и на 5, и на 6 даёт в остатке 2 и цифры в записи которого чётные. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: 242,422,482,602,662,842

Число имеет одинаковый остаток при делении на 4, 5 и 6, а следовательно, при делении этого числа на 60, в остатке тоже будет 2. Таким образом, число имеет вид: 60n+2.

При n=1: 62.

При n=2: 122. Присутствует нечётное число.

Также подходят числа 242, 422, 482, 602, 662 и 842.

№12. Приведите пример шестизначного натурального числа, которое записывается только цифрами 1 и 2 и делится на 72. В ответе укажите ровно одно такое число.

Ответ: 122112, 212112, 221112

Если число делится на 72, то но делится на 8 и на 9.

Если число делится на 8, то число, образованное последними его тремя цифрами, тоже делится на 8. Шестизначных чисел из 1 и 2, делящиеся на 8 должны заканчиваться тройкой цифр 112.

Если число делится на 9, то сумма его цифр тоже делится на 9.

112 даёт к сумме 4, то есть сумма первых цифр должна равняться 5, то есть должна состоять из перестановок двух двоек и единицы.

Таким образом, искомые числа: 122112, 212112, 221112.

№13. Найдите трёхзначное число A, обладающее тремя свойствами:
- сумма цифр числа A делится на 5;
- сумма цифр числа A + 3 делится на 5;
- число A больше 700 и меньше 900.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число A.
Ответ: 717 или 799 или 898
Пусть искомое число A имеет вид abc. Тогда $a+b+c$ кратно 5. Если в числе A+3 изменилась только последняя цифра, то сумма цифр стала $a+b+(c+3)$. Такая сумма точно не будет кратна 5. Значит, за счет прибавления 3 изменились минимум 2 цифры: b и c. Тогда точно знаем, что b увеличилась на 1, и можем говорить, что c не меньше 7 (чтобы выполнялось $c+3 \geq 10$). Переберем числа больше 700 и меньше 900, которые оканчиваются на 7,8 или 9 и сумма цифр которых кратна 5:
708: 708+3=711, 7+1+1=9 - сумма цифр не кратна 5.
717: 717+3=720, 7+1+7=15 - удовлетворяет всем условиям.
749: 749+3=752, 7+5+2=14 - сумма цифр не кратна 5.
767: 758+3=761, 7+6+1=14 - сумма цифр не кратна 5.
799: 799+3=802 - удовлетворяет всем условиям.
807: 807+3=809 - сумма цифр не кратна 5.
839: 839+3=842 - сумма цифр не кратна 5.
848: 848+3=851 - сумма цифр не кратна 5. **857**: 857+3=860 - сумма цифр не кратна 5.
889: 889+3=892 - сумма цифр не кратна 5. **898**: 898+3=901 - удовлетворяет условиям.

№14. Четырёхзначное число *A* состоит из цифр 0, 1, 5, 6, а четырёхзначное число *B* — из цифр 0, 1, 2, 3. Известно, что B=2A. Найдите число *A*. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: 1065, 1506, 1560, 1605

Наибольшая возможная первая цифра B — 3, поэтому первой цифрой A может быть только 1. Поскольку B=2A и число *A* состоит из цифр 0, 1, 5, 6, число *B* является чётным числом и заканчивается на 0 или 2.

Если число *B* заканчивается на 0, то число *A* может заканчиваться на 0 или 5, то есть имеет вид 1××0 или 1××5. Проверка показывает, что числа 1560, 1065 и 1605 подходят, а число 1650 — нет.

Если число *B* заканчивается цифрой 2, то число *A* может заканчиваться на 1 или 6. Но 1 стоит на первом месте, поэтому в этом случае число *A* имеет вид 1××6. Проверка показывает, что число 1056 не подходит, а число 1506 подходит.

Следовательно, искомыми числами являются 1065, 1506, 1560 и 1605 и только они.

№15. На шести карточках написаны цифры 3; 6; 7; 7; 8; 9 (по одной цифре на каждой карточке). В выражении

□+□□+□□□

вместо каждого квадратика положили карточку из данного набора. Оказалось, что полученная сумма делится на 10, но не делится на 20.
В ответе укажите какую-нибудь одну такую сумму.
Ответ: 850, 1030, 490
Сумма кратна 10, значит на конце суммы стоит 0. При этом сумма не кратна 20, значит, предпоследняя цифра должна быть нечётной. Найдём такую тройку цифр, сумма которых кратна 10 (эти цифры будут стоять на позициях единиц в трёх слагаемых).
Для этого подойдут тройки 3, 8, 9 и 6, 7, 7.
1)$3+8+9=20$ - в десятках четная цифра. Чтобы в итоговой сумме в десятках была нечетная, нужно на позиции десятков поставить четную и нечетную цифры. Остались числа 6, 7 и 7, тогда в десятках будут стоять 6 и 7. Оставшаяся 7 будет на позиции сотен. Тогда итоговая сумма будет $700+(60+70)+(3+8+9)=850$ (например, $763+78+9$).
2) $6+7+7=20$ - ситуации аналогична рассмотренной ранее. На позиции десятков могут стоять 3 и 8 или 8 и 9. Получатся суммы $900+(30+80)+(6+7+7)=1030$ (например, $936+87+7$) или $300+(80+90)+(6+7+7)=490$ (например, $386+97+7$).

№1. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в десятом подъезде в квартире № 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (На всех этажах число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Ответ: 3

Поскольку в первых 10 подъездах не меньше 333 квартир, в каждом подъезде не меньше 333 : 10 = 33,3 квартир. Следовательно, на каждом из 9 этажей в подъезде не меньше 3 квартир.

Пусть на каждой лестничной площадке по 3 квартиры. Тогда в первых десяти подъездах всего 10 · 3· 9 = 270 квартира, и квартира 333 окажется в одиннадцатом подъезде, что противоречит условию.

Пусть на каждой площадке по 4 квартиры. Тогда в первых десяти подъездах 10 · 4 · 9 = 360 квартир, а в первых девяти — 324. Следовательно, квартира 333 находится в десятом подъезде. Она в нем 9-ая по счету, поскольку на этаже по 4 квартиры, она расположена на третьем этаже.

Тем самым, Саша живёт на третьем этаже.

№2. В доме всего пятнадцать квартир с номерами от 1 до 15. В каждой квартире живёт не менее одного и не более трёх человек. В квартирах с 1-й по 12-ю включительно живёт суммарно 14 человек, а в квартирах с 11-й по 15-ю включительно живёт суммарно 13 человек. Сколько всего человек живёт в этом доме?

Ответ: 23

В квартире могут жить один, два или три человека.
В квартирах с 1-й по 12-ю включительно живёт суммарно 14 человек, следовательно, в 10 квартирах живёт по одному человеку, а в оставшихся двух квартирах живёт суммарно 4 человека.
В квартирах с 11-й по 15-ю включительно живёт суммарно 13 человек, следовательно, в трёх квартирах живёт по три человека, а в оставшихся двух живёт суммарно 4 человека.
Рассмотренные множества квартир пересекаются по квартирам 11 и 12, значит, именно в квартирах 11 и 12 в сумме живёт 4 человека.
Таким образом, получаем, что всего в доме живёт 10 · 1 + 4 + 3 · 3 = 23 человек.

№3. В доме, в котором живёт Катя, 5 этажей и несколько подъездов. В каждом подъезде на каждом этаже находится по 3 квартиры. Катя живёт в квартире №22. В каком подъезде живёт Катя?

Ответ: 2

В доме, в котором живет Катя, на пяти этажах каждого подъезда 5 · 3 = 15 квартир. Разделим 22 на 15:

$$\frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$$

Значит, Катя живет во 2-м подъезде.

№4. Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на всех этажах одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 357 квартир?

Ответ: 17

Число квартир, этажей и подъездов может быть только целым числом. Заметим, что число 357 делится на 3, 7 и 17. Следовательно, в доме должно быть 3 подъезда, 7 квартир и 17 этажей.

№5. Из десяти стран три подписали договор о дружбе ровно с шестью другими странами, а каждая из оставшихся семи — ровно с двумя. Сколько всего было подписано договоров?

Ответ: 16

Первые три страны подписали по 6 договоров о дружбе с другими странами, то есть, было поставлено

$3 \cdot 6 \ = \ 18$ подписей

Также, каждая из оставшихся семи стран подписали по два договора о дружбе, то есть, было поставлено

$7 \cdot 2 \ = \ 14$ подписей

В сумме было поставлено $18 + 14 \ = \ 32$ подписи.

Очевидно, что договор считается заключенным, если под ним стоят две подписи от каждой страны. Следовательно, договоров было заключено

$$32 : 2 \ = \ 16$$

№6. Восемь столбов соединены между собой проводами так, что от каждого столба отходит ровно 7 проводов. Сколько всего проводов протянуто между этими восемью столбами?

Ответ: 28

От каждого столба отходит по 7 проводов, следовательно, всего будет $8 \cdot 7 = 56$ соединения. Заметим, что каждые два столба связаны одним проводом, поэтому между этими восемью столбами будет протянуто всего $\frac{56}{2} = 28$ проводов.

№7. Если бы каждый из двух множителей увеличили на 2, то их произведение увеличилось бы на 12. На сколько увеличится произведение этих множителей, если каждый из них увеличить на 3?

Ответ: 21

Пусть первый сомножитель равен a, а второй b, их произведение равно ab. При увеличении этих сомножителей на 2 их произведение возрастает на 12, то есть:

$$(a+2)(b+2) = ab + 12$$

$$ab + 2a + 2b + 4 = ab + 12 \Leftrightarrow a + b = 4$$

Теперь вычислим, на сколько увеличится произведение, если сомножители увеличить на 3:

$$(a+3)(b+3) - ab = ab + 3(a+b) + 9$$

$$3(a+b) + 9 = 3 \cdot 4 + 9 = 21$$

№8. Среднее арифметическое пяти различных натуральных чисел равно 7. Среднее арифметическое этих чисел и шестого числа равно 8. Чему равно шестое число?

Ответ: 13

Сумма первых пяти чисел равна $S_5 = 5 \cdot 7 = 35$. Запишем выражение для среднего арифметического шести чисел:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_6}{6} = \frac{S + a_6}{6} = 8$$

Откуда $a_7 = 8 \cdot 6 - 35 = 13$

№9. В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:
— за 5 золотых монет получить 7 серебряных и одну медную;
— за 10 серебряных монет получить 7 золотых и одну медную.
У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 60 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?
Ответ: 5
Пусть Никола сделал сначала x операций второго типа, а затем y операций первого типа. Тогда имеем:

- Количество монет не изменилось, поэтому $7x = 5y$
- Количество медных монет уменьшилось на 60, поэтому $x + y = 60$

$$\begin{cases} 7x = 5y \\ x + y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5y}{7} \\ \frac{5y}{7} + y = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5y}{7} \\ \frac{12y}{7} = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 35 \end{cases}$$

Тогда серебряных монет стало на $7y - 10x = 245 - 250 = -5$ больше, то есть на 5 меньше.

№10. Петя меняет маленькие фишки на большие. За один обмен он получает 6 больших фишек, отдав 9 маленьких. Сначала у Пети было 100 фишек (больших и маленьких), а стало 79. Сколько обменов он совершил?

Ответ: 7

Лайфхак для решения:

Фишек уменьшилось на

$$100 - 79 = 21$$

Затем

$$9 - 6 = 3$$
$$21 : 3 = 7$$

№11. Из книги выпало несколько идущих подряд листов. Номер последней страницы перед выпавшими листами — 298, номер первой страницы после выпавших листов записывается теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько листов выпало?

Ответ: 265

Из числа 298 можно составить числа 289, 892, 829, 928 и 982.

Число 289 не подходят, поскольку оно меньше числа 298.

Номер первой страницы после выпавших листов должен быть нечётным, поскольку номер последней страницы перед выпавшими листами чётный.

Следовательно, нам подходит только число 829.

Вычтем из числа 829 одну страницу, поскольку страница 829 не выпала, а является первой страницей после выпавших листов. Теперь можно найти количество выпавших листов: $\frac{829-1-298}{2} = 265$

№12. Маша и Медведь съели 160 печений и банку варенья, начав и закончив одновременно. Сначала Маша ела варенье, а Медведь — печенье, но в какой-то момент они поменялись. Медведь и то и другое ест в 3 раза быстрее Маши. Сколько печений съел Медведь, если варенья они съели поровну.

Ответ: 144

Маша и Медведь съели варенья поровну, следовательно, Маша потратила на поедание варенья в три раза больше времени, чем Медведь. Всё то время пока Маша ела варенье, Медведь ел печенье, причём в три раза быстрее, чем ест печенье Маша, то есть Медведь съел в $3 \cdot 3 = 9$ раз больше печенья. Пусть x — количество печений, которое съела Маша, тогда получаем уравнение: $x + 9x = 160$, откуда $x = 16$. Значит, Медведь съел $16 \cdot 9 = 144$ печений.

№13. Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Площади трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 18, 15 и 20. Найдите площадь четвёртого прямоугольника.

18	15
?	20

Ответ: 24

ЛАЙФХАК для решения:
Представим таблицу в виде пропорции. Тогда

$$\frac{18 \cdot 20}{15} = \frac{6 \cdot 20}{5} = 6 \cdot 4 = 24$$

№14. Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Периметры трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 24, 28 и 16. Найдите периметр четвёртого прямоугольника.

24	28
?	16

Ответ: 12

ЛАЙФХАК для решения:

$$24 + 16 - 28 = 40 - 28 = 12$$

№15. Улитка за день заползает вверх по дереву на 4 м, а за ночь сползает на 2 м. Высота дерева 14 м. За сколько дней улитка впервые доползет до вершины дерева?
Ответ: 6

Улитка за день поднимается вверх на 4 м, а опускается вниз на 2 м. Итого за сутки она продвигается на 2 м. За 5 суток она поднимется на 10 м. За 6 день улитка поднимется ещё на 4 м и окажется на высоте 14 м, то есть она достигнет вершины дерева.

№16. Миша, Коля и Лёша играют в настольный теннис: игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что Миша сыграл 12 партий, а Коля — 25. Сколько партий сыграл Лёша?

Ответ: 13

Больше всех партий сыграл Коля, следовательно, было сыграно не менее 25 партий. В одной из первых двух партий должен был участвовать Миша, значит, было сыграно не более $2 \cdot 12 + 1 = 25$ партии. Значит, Коля участвовал в каждой сыгранной партии. Таким образом, Лёша сыграл
$25 - 12 = 13$ партий.
ЛАЙФХАК для решения: $25 - 12 = 13$

№17. Клетки таблицы 3×7 раскрашены в чёрный и белый цвета так, что получилось 17 пар соседних клеток разного цвета и 11 пар соседних клеток чёрного цвета. (Клетки считаются соседними, если у них есть общая сторона.) Сколько пар соседних клеток белого цвета?
Ответ: 4
Угловые клетки имеют по 2 соседа, таких клеток в таблице 4, значит, всего пар $2 \cdot 4 = 8$. Крайние клетки (не угловые) имеют по 3 пары, таких клеток 12, значит, всего пар $12 \cdot 3 = 36$. Все остальные клетки имеют по 4 пары, таких клеток $21 - 4 - 12 = 5$, то есть 20 пар. Всего имеем пар $8 + 36 + 20 = 64$. В приведенных расчетах все пары взяты дважды (так как учитывались все клетки). Таким образом, уникальных пар $64 : 2 = 32$. Поэтому пар белого цвета $32 - 17 - 11 = 4$.

№18. Кузнечик прыгает вдоль координатной прямой в любом направлении на единичный отрезок за один прыжок. Кузнечик начинает прыгать из начала координат. Сколько существует различных точек на координатной прямой, в которых кузнечик может оказаться, сделав ровно 11 прыжков?

Ответ: 12

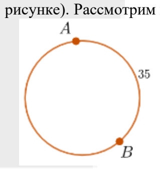
Заметим, что кузнечик может оказаться только в точках с нечётными координатами, поскольку число прыжков, которое он делает, — нечётно. Максимально кузнечик может оказаться в точках, модуль которых не превышает одиннадцати. Таким образом, кузнечик может оказаться в точках: −11, −9, −7, −5, −3, −1, 1, 3, 5, 7, 9 и 11; всего 12 точек.

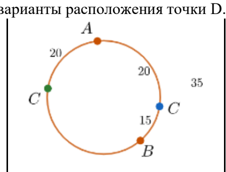
№19. В таблице три столбца и несколько строк. В каждую клетку таблицы вписали по натуральному числу так, что сумма всех чисел в первом столбце равна 72, во втором — 81, в третьем — 91, а сумма чисел в каждой строке больше 13, но меньше 16. Сколько всего строк в таблице?

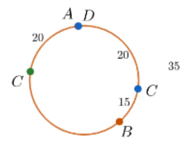
Ответ: 17

Сумма всех чисел в таблице равна $72 + 81 + 91 = 244$. Сумма чисел в каждой строке может быть равна 14 или 15. В таблице не может быть больше, чем $\frac{244}{14} = 17\frac{6}{14} = 17\frac{3}{7}$ строк. И не может быть меньше $\frac{244}{15} = 16\frac{4}{15}$ строк. Следовательно, в таблице ровно 17 строк.

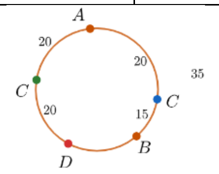
№20. На кольцевой дороге расположены четыре бензоколонки: A, B, C и D. Расстояние между A и B — 35 км, между A и C — 20 км, между C и D — 20 км, между D и A — 30 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги в кратчайшую сторону). Найдите расстояние между B и C. Ответ дайте в километрах.
Ответ: 15
Расположим A, B, C, D вдоль кольцевой дороги по очереди так, чтобы расстояния соответствовали данным в условии. Обозначим расстояние между A и B — 35 км. Рассмотрим варианты расположения точки C (обозначены синим и зеленым цветом на рисунке). Рассмотрим варианты расположения точки D.



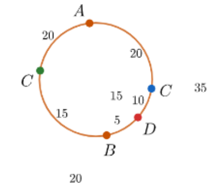




совпадение точек (не подходит)



При данном расположении точки D расстояние между D и A получается намного больше, чем в условии задачи.

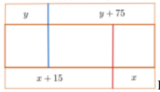


При данном расположении точки D мы получим, что расстояние CD = 10, BD = 5. Тогда, BC = CD – BD = 20 – 5 = 15

№21. На ленте по разные стороны от середины отмечены две тонкие поперечные полоски: синяя и красная. Если разрезать ленту по красной полоске, то одна часть будет на 15 см длиннее другой. Если разрезать ленту по синей полоске, то одна часть будет на 75 см длиннее другой. Найдите расстояние (в сантиметрах) между красной и синей полосками.

Ответ: 45

Обозначим через y – расстояние от начала ленты до синей полоски; через x – расстояние от красной полоски и до конца ленты.



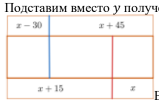
Выразим расстояние между синей и красной полосками:

$$y + 75 - x$$
$$x + 15 - y$$

Получим уравнение:

$$y + 75 - x = x + 15 - y$$
$$2y - 2x + 60 = 0$$
$$y = x - 30$$

Подставим вместо y полученное выражение:



Выразим расстояние между синей и красной полосками:

$$x + 45 - x = 45$$

То есть, расстояние между полосками равно 45 см.

№22. На палке отмечены поперечные линии красного, жёлтого и зелёного цвета. Если распилить палку по красным линиям, получится 15 кусков, если по жёлтым — 5 кусков, а если по зелёным — 7 кусков. Сколько кусков получится, если распилить палку по линиям всех трёх цветов?

Ответ: 25

Если распилить палку по красным линиям, то получится 15 кусков, следовательно, линий — 14. Если распилить палку по желтым — 5 кусков, следовательно, линий — 4. Если распилить по зеленым — 7 кусков, линий — 6. Всего линий: $14 + 4 + 6 = 24$ линии, следовательно, кусков будет 25.

№23. В корзине лежит 40 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 17 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 25 грибов хотя бы один груздь. Сколько рыжиков в корзине?

Ответ: 24

Груздей максимум 16 (иначе можно было бы взять 17 груздей и условие бы не выполнилось). Рыжиков максимум 24 (иначе можно было бы взять 25 груздей в нарушение условия). Известно, что в корзине всего 40 грибов. Поэтому груздей ровно 16, а рыжиков ровно 24.

№24. В магазине квас на разлив можно купить в бутылках, причём стоимость кваса в бутылке складывается из стоимости самой бутылки и кваса, налитого в неё. Цена бутылки не зависит от её объёма. Бутылка кваса объёмом 1 литр стоит 36 рублей, объёмом 2 литра — 66 рублей. Сколько рублей будет стоить бутылка кваса объёмом 1,5 литра?

Ответ: 51

Пусть стоимость бутылки x, стоимость кваса за литр y. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x + 2y = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 30 \end{cases}$$

Тогда бутылка кваса объёмом 1,5 литра будет стоить $6 + 30 \cdot 1{,}5 = 51$ рубль.

№25. Про натуральные числа A, B и C известно, что каждое из них больше 6, но меньше 10. Загадали натуральное число, затем его умножили на A, потом прибавили к полученному произведению B и вычли C. Получилось 186. Какое число было загадано?

Ответ: 23

Числа A, B и C могут быть равны 7, 8 или 9.
Пусть загадали натуральное число X, тогда $X \cdot A + B - C = 186$ или $X \cdot A = 186 + (C - B)$.
Рассмотрим различные случаи.
1) $C - B = 0$ ($7 - 7 = 0$, $8 - 8 = 0$ или $9 - 9 = 0$), тогда $X \cdot A = 186$. Число 186 не делится нацело на 7, на 8 и на 9, значит, этот случай не подходит.
2) $C - B = 1$ ($8 - 7 = 1$ или $9 - 8 = 1$), тогда $X \cdot A = 187$. Число 187 не делится нацело на 7, на 8 и на 9, значит, этот случай не подходит.
3) $C - B = -1$ ($7 - 8 = -1$ или $8 - 9 = -1$), тогда $X \cdot A = 185$. Число 185 не делится нацело на 7, на 8 и на 9, значит, этот случай не подходит.
4) $C - B = 2$ ($9 - 7 = 2$), тогда $X \cdot A = 188$. Число 188 не делится нацело на 7, на 8 и на 9, значит, этот случай не подходит.
5) $C - B = -2$ ($7 - 9 = -2$), тогда $X \cdot A = 184$. Число 184 делится нацело на $A = 8$, значит, $X = 23$.

№26. На поверхности глобуса фломастером проведены 12 параллелей и 22 меридиана. На сколько частей проведённые линии разделили поверхность глобуса? Меридиан — это дуга окружности, соединяющая Северный и Южный полюсы. Параллель — это окружность, лежащая в плоскости, параллельной плоскости экватора.

Ответ: 286

Двенадцать параллелей разделили глобус на 13 частей, следовательно, $13 \cdot 22 = 286$ — на столько частей разделят глобус 12 параллелей и 22 меридиана.

№27. В конце четверти Петя выписал подряд все свои отметки по одному предметов, их оказалось 5, и поставил между некоторыми из них знаки умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 690. Какая отметка выходит у Пети в четверти по этому предмету, если учитель ставит только отметки «2», «3», «4» или «5» и итоговая отметка в четверти является средним арифметическим всех текущих отметок, округлённая по правилам округления? (Например, 3,2 округляется до 3; 4,5 — до 5; а 2,8 — до 3.)

Ответ: 3

Разложим число 690 на множители так, чтобы получившиеся множители состояли только из чисел 2, 3, 4, 5, и общее количество цифр в произведении было равно пяти: $690 = 2 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 3$. Следовательно, учитель поставил Пете отметки 2, 5, 2, 3 и 3. Среднее арифметическое этих оценок:

$$\frac{2 + 5 + 2 + 3 + 3}{5} = 3$$

№28. Список заданий викторины состоял из 33 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 11 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 84 очка, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Ответ: 23

Пусть ученик дал x правильных ответов, y неправильных ответов $(y \geq 1)$и на z вопросов не ответил. Тогда

$$x + y + z = 33$$

За каждый правильный ответ он получал 7, за неправильный (-11), за неосвещенный вопрос — 0 очков. Поэтому:

$$7x - 11y + 0z = 84$$

Отсюда имеем: $11y = 7x - 84 = 7(x - 12)$
Так как число $7(x - 12)$ делится на 7, то и $11y$ делится на 7. Рассмотрим два случая.
Если y=7 , тогда $x - 12 = 11$, то есть x=12+11=23. Тогда из первого уравнения получаем:

$$z = 33 - x - y = 33 - 23 - 7 = 3$$

Если y=14, тогда $7(x - 12) = 154$, то есть количество правильно отвеченных вопросов $x = 22 + 12 = 34 > 33$. Это противоречит условию задачи.
Таким образом, ученик правильно ответил на 23 вопроса.

№1. Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 19 вопросов теста, а Ваня — на 20. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 9 минут. Сколько вопросов содержит тест?

Ответ: 57

Скорость выполнения теста Петей равна 19 вопросов/час, Ваней - 20 вопросов/час.

Если в тесте x вопросов, то Петя выполнит его за $\frac{x}{19}$ ч, а Ваня за $\frac{x}{20}$ч.

Известно, что Петя закончил на 9мин= $\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$ ч позже.

Имеем равенство:

$$\frac{x}{19}-\frac{x}{20}=\frac{3}{20}$$

$$20x-19x=57$$

$$x=57$$

№2. Один мастер может выполнить заказ за 42 часа, а другой за 21 час. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

Ответ: 14

Скорость работы первого мастера $\frac{1}{42}$, второго -$\frac{1}{21}$.

Скорость их совместной работы:

$$\frac{1}{42}+\frac{1}{21}=\frac{1+2}{42}=\frac{3}{42}=\frac{1}{14}$$

Так как всю работу обозначали за 1, следовательно,

$$\frac{1}{\frac{1}{14}}=14$$

Значит, работая вместе, заказ будет выполнен за 14 часов.

№3. Первый насос наполняет бак за 45 минут, второй — за 55 минут, а третий — за 1 час 6 минут. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

Ответ: 18

Скорость заполнения бака первым насосом равна $\frac{1}{45}$ часть бака/мин., вторым - $\frac{1}{55}$ часть бака/мин., третьим - $\frac{1}{66}$ часть бака/мин. (1 час 6 минут = 66 минут).

Скорость заполнения при совместной работе равна:

$$\frac{1}{45}+\frac{1}{55}+\frac{1}{66}=\frac{22+18+15}{990}=\frac{1}{18}$$

Так как всю работу обозначали за 1, следовательно,

$$\frac{1}{\frac{1}{18}}=18$$

Значит, работая вместе, насосы наполнят бак за 18 минут.

№4. Первые 190 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 180 км — со скоростью 90 км/ч, а затем 170 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 72

Найдём время на первом участке пути: $\frac{190}{50}$ км/ч

Найдём время на втором участке пути: $\frac{180}{90}$ км/ч

Найдём время на третьем участке пути: $\frac{170}{100}$ км/ч

Средняя скорость находится по формуле:

$$V_{ср}=\frac{\text{все } S}{\text{все } t}$$

Чтобы найти среднюю скорость на протяжении пути, нужно весь путь разделить на все время движения. Средняя скорость автомобиля равна

$$V_{ср}=\frac{190+180+170}{\frac{190}{50}+\frac{180}{90}+\frac{170}{100}}=\frac{540}{3.8+2+1.7}=\frac{540}{7.5}=72\ \frac{км}{ч}$$

№5. Из городов A и B, расстояние между которыми равно 330 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 3 часа на расстоянии 180 км от города B. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города A. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 50

Автомобиль, выехавший из города A, преодолел расстояние (330 − 180) км = 150 км за 3 часа. Пусть v км/ч — скорость данного автомобиля. Таким образом,

$$v=\frac{150}{3}=50\ \frac{км}{ч}$$

№6. Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующий час — со скоростью 100 км/ч, а затем два часа — со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 70

Найдём расстояние за первый отрезок времени: $2\cdot 50$ км

Найдём расстояние за второй отрезок времени: $1\cdot 100$ км

Найдём расстояние за третий отрезок времени: $2\cdot 75$ км

Средняя скорость находится по формуле:

$$V_{ср}=\frac{\text{все } S}{\text{все } t}$$

Средняя скорость равна:

$$V_{ср}=\frac{2\cdot 50+1\cdot 100+2\cdot 75}{2+2+1}=70\ \frac{км}{ч}$$

№7. Первую треть пути автомобиль ехал со скоростью 40 км/ч, вторую треть — со скоростью 120 км/ч, а последнюю — со скоростью 70 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 63

Пусть треть пути равна S км.
Чтобы найти среднюю скорость на протяжении пути, нужно весь путь разделить на все время движения.

$$V_{ср}=\frac{\text{все } S}{\text{все } t}$$

Пусть 3S км — весь путь автомобиля, тогда средняя скорость равна:

$$\frac{3S}{\frac{S}{40}+\frac{S}{120}+\frac{S}{70}}=\frac{3}{\frac{1}{40}+\frac{1}{120}+\frac{1}{70}}=\frac{3}{\frac{21}{840}+\frac{7}{840}+\frac{12}{840}}=\frac{3\cdot 840}{21+7+12}=63\ \frac{км}{ч}$$

№8. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 38,4

Пусть S км – расстояние в одну сторону.

Чтобы найти среднюю скорость на протяжении пути, нужно весь путь разделить на все время движения.

$$V_{ср}=\frac{\text{все } S}{\text{все } t}$$

Пусть 2S км — весь путь путешественника, тогда средняя скорость равна:

$$2S:\left(\frac{S}{20}+\frac{S}{480}\right)=2S:\frac{24S+S}{480}=\frac{2S\cdot 480}{25S}=38.4\ \frac{км}{ч}$$

Поэтому средняя скорость путешественника 38,4 км/ч.

№9. Дорога между пунктами A и B состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 8 км. Путь из A в B занял у туриста 5 часов, из которых 1 час ушёл на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 4

Пусть скорость, с которой турист спускался, равна x км/час, тогда его скорость на подъёме равна $x-3$ км/ч, длина спуска равна x км, длина подъёма равна $4(x-3)$ км. Поскольку весь путь равен 8 км, имеем: $x+4(x-3)=8$, откуда $x=4$ км/ч.

№10. Два человека отправляются из одного дома на прогулку до опушки леса, находящейся в 6,3 км от дома. Один идёт со скоростью 2,5 км/ч, а другой со скоростью 3,8 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от дома произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

Ответ: 5

Пусть первый человек прошел x км. Второй прошел весь путь до опушки и обратный путь до встречи с первым, то есть $6{,}3 + (6{,}3 - x) = 12{,}6 - x$ км.
Время движения первого: $\frac{x}{2.5}$. Время движения первого: $\frac{12.6-x}{3.8}$. По условию они шли в одно время, то есть

$$\frac{x}{2.5} = \frac{12.6 - x}{3.8}$$

$$3.8x = 2.5(12.6 - x)$$

$$3.8x = 31.5 - 2.5x$$

$$6.3x = 31.5 \Rightarrow x = 5$$

Первый прошел 5 км от дома. На этом расстоянии он встретился со вторым.

№11. Расстояние между городами *A* и *B* равно 435 км. Из города *A* в город *B* со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города *B* выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города *A* автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

Ответ: 240

Пусть автомобили встретятся на расстоянии *S* км от города *A*, тогда второй автомобиль пройдет расстояние 435-S км. Второй автомобиль находился в пути на 1 час меньше первого, отсюда имеем:

$$\frac{S}{60} = \frac{435 - S}{65} + 1$$

$$\frac{S}{60} = \frac{435 - S + 65}{65}$$

$$65S = 60 \cdot 500 - 60S$$

$$125S = 30000 \Leftrightarrow S = 240$$

№12. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

Ответ: 616

Пусть S км – расстояние в одну сторону, тогда весь путь теплохода равен 2S км. Время в пути составляет 30 часов, из которых 5 часов — стоянка:

$$\frac{S}{25-3} + \frac{S}{25+3} = 30 - 5$$

$$\frac{50S}{22 \cdot 28} = 25$$

$$S = 308$$

Тем самым, весь путь теплохода составляет $2 \cdot 308 = 616$ км.

№13. Моторная лодка прошла против течения реки 99 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 10 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 1

Пусть u км/ч — скорость течения реки, тогда скорость лодки по течению равна $10 + u$ км/ч, а скорость лодки против течения равна $10 - u$ км/ч, $0 < u < 10$. На обратный путь лодка затратила на 2 часа меньше, отсюда имеем:

$$\frac{99}{10-u} - \frac{99}{10+u} = 2$$

$$\frac{198u}{(10-u)(10+u)} = 2$$

$$\frac{99u}{100-u^2} = 1$$

$$99u = 100 - u^2$$

$$u^2 + 99u - 100 = 0$$

$$u = 1,\ u = -100$$

Таким образом, скорость течения реки равна 1 км/ч.

№14. Катер в 10:00 вышел из пункта *A* в пункт *B*, расположенный в 30 км от *A*. Пробыв в пункте *B* 2 часа 30 минут, катер отправился назад и вернулся в пункт *A* в 18:00 того же дня. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость катера равна 11 км/ч.

Ответ: 1

Пусть u км/ч — скорость течения реки, тогда скорость катера по течению равна $11 + u$ км/ч, а скорость катера против течения равна $11 - u$ км/ч. Катер вернулся в пункт *A* через 8 часов, но пробыл в пункте *B* 2 часа 30 минут, поэтому общее время движения катера дается уравнением:

$$\frac{30}{11-u} + \frac{30}{11+u} = 8 - 2.5$$

$$\frac{30 \cdot (11+u) + 30 \cdot (11-u)}{121 - u^2} = 5.5$$

$$60 \cdot 11 = 5.5 \cdot 121 - 5.5u^2$$

$$u^2 = 1$$

$$u = 1,\ u = -1$$

№15. В сосуд, содержащий 5 литров 12−процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: 5

	$m_р$	$m_в$	Концентрация
I	5 л	$0{,}12 \cdot 5 = 0{,}6$ л	12%
Вода	7 л	-	-
I + Вода	12 л	0,6 л	?

Концентрация раствора равна

$$C = \frac{V_{в-ва}}{V_{р-ра}} \cdot 100\%$$

Объем вещества в исходном растворе равен $0{,}12 \cdot 5 = 0{,}6$ литра. При добавлении 7 литров воды общий объем раствора увеличится, а объем растворенного вещества останется прежним. Таким образом, концентрация полученного раствора равна:

$$\frac{0{,}6}{5+7} \cdot 100\% = \frac{0{,}6}{12} \cdot 100\% = 5\%$$

№16. Смешали 4 литра 15−процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25−процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: 21

	$m_р$	$m_в$	Концентрация
I	4 л	$0{,}15 \cdot 4 = 0{,}6$ л	15%
Вода	6 л	$0{,}25 \cdot 6 = 1{,}5$ л	25%
I + Вода	10 л	2,1 л	?

Концентрация раствора равна $C = \frac{V_{в-ва}}{V_{р-ра}} \cdot 100\%$. Таким образом, концентрация получившегося раствора равна:

$$\frac{0.15 \cdot 4 + 0.25 \cdot 6}{4+6} \cdot 100\% = \frac{2.1}{10} \cdot 100\% = 21\%$$

№17. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 45% меди, второй — 20% меди. Масса первого сплава больше массы второго на 30 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 40% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: 50

	$m_р$	$m_в$	Концентрация
I	$x + 30$	$0{,}45(x + 30)$	45%
II	x	$0{,}2x$	20%
$I + II$	$x + 30 + x$ $= 2x + 30$	$0{,}4(2x + 30)$	40%

Тогда:

$$0.45(x+30) + 0{,}2x = 0{,}4(2x+30)$$
$$0{,}45x + 13{,}5 + 0{,}2x = 0{,}8x + 12$$
$$0{,}15x = 1.5$$
$$m = 10$$

Таким образом, масса третьего сплава равна 50 кг

№18. Смешали некоторое количество 15%-го раствора некоторого вещества с таким же количеством 19%-го раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: 17

Процентная концентрация раствора (массовая доля) равна $\omega = \frac{m_{в-ва}}{m_{р-ра}} \cdot 100\%$. Пусть масса получившегося раствора 2m. Таким образом, концентрация полученного раствора равна:

$$\omega = \frac{0.15m + 0.19m}{2m} \cdot 100\% = \frac{0.34}{2} \cdot 100\% = 17\%$$

Лайфхак: найдем среднее арифметическое

$$\frac{15+19}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

Знаки тригонометрических функций в различных четвертях