Напомним необходимые формулы:

Формула	Ограничения
$a^0 = 1$	$a > 0$
$a^1 = a$	$a > 0$
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$a > 0; x$ — любое
$(a^x)^y = a^{x\cdot y}$	$a > 0; x, y$ — любые
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$a > 0; x, y$ — любые
$a^x : a^y = a^{x-y}$	$a > 0; x, y$ — любые
$a^x \cdot b^x = (a\cdot b)^x$	$a > 0; b > 0; x$ — любое
$a^x : b^x = (a : b)^x$	$a > 0; b > 0; x$ — любое
$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$	$a > 0$
$\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$	$a > 0; n$ — натуральное; x — любое
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$a > 0; n, m$ — натуральные

Простейшее показательное неравенство

$$a^{h(x)} \geqslant a^{g(x)}$$

где $a > 0,\ a \neq 1$ (на месте знака $\geqslant$ может стоять любой из знаков $\leqslant,\ >,\ <$)
Для того, чтобы решить это неравенство, нужно сравнить основание a с единицей:

- если $a > 1$, то данное неравенство равносильно $h(x) \geqslant g(x)$
- если $0 < a < 1$, то данное неравенство равносильно $h(x) \leqslant g(x)$

Замечание

С помощью формулы $b = a^{\log_a b}$ можно любое число $b > 0$ представить в виде степени с необходимым нам основанием $a > 0,\ a \neq 1$.

Пример 1

logo_new

Решить неравенство $3^x \leqslant 9^{x^2}$.
Заметим, что $9 = 3^2$, следовательно, неравенство можно переписать в виде $3^x \leqslant 3^{2x^2}$. Так как основание степени $3 > 1$, то знак неравенства менять не будем:

$$x \leqslant 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x(2x-1) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Пример 2

Решить неравенство $5^x > -1$.
По определению $5^x > 0$ при любых x. Нам нужно, чтобы $5^x > -1$. Так как 5^x всегда больше нуля, то 5^x тем более всегда будет больше -1. Следовательно, нам подходят все x. То есть ответ: $x \in \mathbb{R}$.

Пример 3

Решить неравенство $2^x > 3^{x-1}$.
Нужно представить левую и правую части неравенства как степени с одинаковым основанием. Воспользовавшись формулой, можно записать $3 = 2^{\log_2 3}$. Тогда неравенство примет вид

$$2^x > 2^{\log_2 3\cdot(x-1)}$$

Так как основание степени $2 > 1$, то знак неравенства не будет меняться и данное неравенство равносильно неравенству $x > \log_2 3\cdot(x-1)$. Отсюда $(1-\log_2 3)x > -\log_2 3$.
Так как $\log_2 3 > 1$, то $(1-\log_2 3) < 0$, значит, при делении правой и левой частей неравенства на $(1-\log_2 3)$ нужно изменить знак неравенства на противоположный, то есть

$$x < -\frac{\log_2 3}{1-\log_2 3} \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{\log_2 3}{\log_2 3 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; \frac{\log_2 3}{\log_2 3 - 1}\right)$$

Показательные неравенства, решаемые заменой

1) выписать ОДЗ всех функций (условие «знаменатель не равен нулю» обязательно, если вы называете свои ограничения словом ОДЗ);
2) сделать замену (например, на t);
3) записать, какие значения может принимать новая переменная;
4) решить ДО КОНЦА неравенство с новой переменной, записав конечный ответ;
5) вернуться к старой переменной, переписав ответ в виде неравенств/равенств;
6) решить эти неравенства/равенства и получить ответ на старую переменную;
7) пересечь конечный ответ с ОДЗ и записать окончательный ответ в виде промежутков.

Пример 4

Решить неравенство $\dfrac{3\cdot 9^{-x} - 28\cdot 3^{-x} + 9}{27^{-x}} \leqslant 0$

1) Так как в неравенстве встречаются только показательные функции, а $27^{-x} > 0$ при всех x, то ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.
2) Заметим, что $9^{-x} = (3^2)^{-x} = (3^{-x})^2$ и аналогично $27^{-x} = (3^{-x})^3$. Следовательно, если сделать замену $3^{-x} = t$, то неравенство примет вид

$$\frac{3t^2 - 28t + 9}{t^3} \leqslant 0$$

3) Сразу запишем, что так как по определению $3^{-x} > 0$, то $t > 0$. Следовательно, отрицательные значения и 0 можно будет отбросить.
4) Мы получили рациональное неравенство. Решая его методом интервалов, получим

$$t \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{3}; 9\right]$$

Так как t не может быть отрицательным, то промежуток $(-\infty; 0)$ можно отбросить. Тогда получаем $t \in \left[\frac{1}{3}; 9\right]$.
5) Вернемся к переменной x. Так как мы получили, что $\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 9$, то $\frac{1}{3} \leqslant 3^{-x} \leqslant 9$.
6) Данное двойное неравенство можно решать так:

$3^{-1} \leqslant 3^{-x} \leqslant 3^2 \quad \Leftrightarrow$ (так как основание степени больше 1, то знак меняться не будет)

$-1 \leqslant -x \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow$ (умножим все части неравенства на -1, тогда все знаки неравенства сменятся на противоположные)

$1 \geqslant x \geqslant -2 \quad \Leftrightarrow$

$-2 \leqslant x \leqslant 1$

7) Так как на ОДЗ ограничений не было, то окончательный ответ:

$$x \in [-2; 1]$$

Напомним необходимые формулы:

Формула	Ограничения
$a^{\log_a b} = b$	$a > 0, a \neq 1, b > 0$
$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$	$a, b, c > 0, c \neq 1$
$\log_a 1 = 0$	$a > 0, a \neq 1$
$\log_a a = 1$	$a > 0, a \neq 1$
$\log_a a^k = k$	$a > 0, a \neq 1, k$ – любое
$\log_{a^k} a = \frac{1}{k}$	$a > 0, a \neq 1, k \neq 0$
$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ $\log_a b^m = m \cdot \log_a \lvert b\rvert$	$a > 0, a \neq 1, b > 0, n$ – нечетное $a > 0, a \neq 1, b \neq 0, m$ – четное
$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$ $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_{\lvert a\rvert} b$	$a > 0, a \neq 1, b > 0, n$ – нечетное $a \neq 0, 1, b > 0, m \neq 0$ – четное
$\log_a bc = \log_a \lvert b\rvert + \log_a \lvert c\rvert$	$a > 0, a \neq 1, bc > 0$
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a \lvert b\rvert - \log_a \lvert c\rvert$	$a > 0, a \neq 1, \frac{b}{c} > 0$
$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$	$a, b > 0, a, b \neq 1, c > 0$
$\log_a b \cdot \log_b a = 1$ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$	$a, b > 0, a, b \neq 1$

Простейшие логарифмические неравенства

$$\log_a h(x) \geqslant \log_a g(x)$$

где $a > 0,\ a \neq 1$ (на месте знака $\geqslant$ может стоять любой из знаков $\leqslant,\ >,\ <$)
ОДЗ простейшего логарифмического неравенства – это $h(x) > 0$ и $g(x) > 0$.
Для того, чтобы решить это неравенство, нужно сравнить основание a с единицей:

- если $a > 1$, то данное неравенство равносильно системе (не забываем про ОДЗ!)

$$\begin{cases} h(x) \geqslant g(x) \\ g(x) > 0 \quad \text{(ОДЗ)} \end{cases}$$

Заметим, что условие $h(x) > 0$ учитывается автоматически в такой системе, так как если $h \geqslant g$, а $g > 0$, то и $h > 0$.

- если $0 < a < 1$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) \leqslant g(x) \\ h(x) > 0 \quad \text{(ОДЗ)} \end{cases}$$

Заметим, что условие $g(x) > 0$ учитывается автоматически в такой системе.

Замечание

С помощью формулы $b = \log_a a^b$ можно любое число b представить в виде логарифма по необходимому основанию $a > 0,\ a \neq 1$.

logo_new

Пример 1

Решить неравенство $\log_{0,2}(x+1) < -1$.
1) ОДЗ неравенства: $x + 1 > 0$, или $x > -1$.
2) Решим неравенство на ОДЗ. Число -1 можно представить как $\log_{0,2}(0,2^{-1}) = \log_{0,2} 5$. Следовательно:

$$\log_{0,2}(x+1) < \log_{0,2} 5 \quad \Rightarrow \quad x + 1 > 5$$

(знак неравенства сменился, так как основания логарифмов $0,2 < 1$)
Неравенство равносильно $x > 4$, следовательно,

$$x \in (4; +\infty)$$

3) После пересечения с ОДЗ получим итоговый ответ: $x \in (4; +\infty)$.

Пример 2 (логарифмическое неравенство, решаемое заменой)

Решить неравенство $\dfrac{2\log_3(9x) - 13}{\log_3^2 x - 4\log_3 x} \leqslant 1$.

1) Запишем ограничения, которые накладывают логарифмы:

$$\begin{cases} 9x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x > 0$$

2) Решим неравенство при $x > 0$. Заметим, что при $x > 0$ верно: $\log_3(9x) = \log_3 9 + \log_3 x = 2 + \log_3 x$. Также заметим, что $\log_3^2 x = (\log_3 x)^2$. Следовательно, можно сделать замену $\log_3 x = t$ и переписать неравенство в виде

$$\frac{2(2+t) - 13}{t^2 - 4t} \leqslant 1$$

3) Так как логарифм может принимать любые значения, то и $t \in \mathbb{R}$.
4) Решим полученное рациональное неравенство:

$$\frac{2t-9}{t(t-4)} - \frac{t^2-4t}{t(t-4)} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-t^2+6t-9}{t(t-4)} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2-6t+9}{t(t-4)} \geqslant 0$$

Заметим, что $t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$, следовательно,

$$\frac{(t-3)^2}{t(t-4)} \geqslant 0$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, получим:

$$t \in (-\infty; 0) \cup \{3\} \cup (4; +\infty)$$

5-6) Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x < 0 \\ \log_3 x = 3 \\ \log_3 x > 4 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \log_3 x < \log_3 1 \\ \log_3 x = \log_3 27 \\ \log_3 x > \log_3 81 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x = 27 \\ x > 81 \end{array}\right.$$

7) Пересечем данное множество с $x > 0$ и получим итоговый ответ

$$x \in (0; 1) \cup \{27\} \cup (81; +\infty)$$