БЛОК ЛОГАРИФМОВ

Определение

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где a > 0, a ≠ 1, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

$$a^x = b \quad \text{при условии, что выполняется система} \begin{cases} x = \log_a b \\ a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$$
$$x = \log_a b$$

$$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

Частный случай

Логарифм единицы по любому положительному, отличному от 1, основанию равен нулю.

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_8 1 = 0$$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

$$5^{\log_5 4} = 4$$

Это равенство справедливо при b > 0, a > 0, a ≠ 1.

Десятичный логарифм

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут lg(b) вместо $\log_{10} b$.

$$\log_{10} b = \lg(b)$$

$$\lg(1000) = \log_{10}(10)^3 = 3$$

Натуральный логарифм

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e - иррациональное число, примерно равное 2,7. При этом пишут ln(b) вместо $\log_e(b)$.

$$\log_e b = \ln(b)$$

№1 | Формулы для основания и аргумента логарифма

1 формула

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

$$\log_5 2^3 = 3 \cdot \log_5 2$$

2 формула

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$$

$$\log_{3^2} 5 = \frac{1}{2} \cdot \log_3 5$$

3 формула

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b$$

$$\log_{3^3} 4^5 = \frac{5}{3} \cdot \log_3 4$$

№2 | Логарифм произведения

Логарифм произведения равен сумме логарифмов по тому же основанию от каждого множителя при a, b, c > 0, a ≠ 1:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_4 8 + \log_4 32 = \log_4(8 \cdot 32) = \log_4(256) = 4$$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

1) $a^{\log_a b} = b$
2) $\log_{10} b = \lg(b)$
3) $\log_e b = \ln(b)$
4) $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$
5) $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$
6) $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b$
7) $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
8) $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$
9) $\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d$
10) $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$
11) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
12) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
13) $\log_a 1 = 0$

№3 | Логарифм частного

Логарифм частного равен разности логарифмов от числителя и знаменателя по тому же основанию при a, b, c > 0, a ≠ 1.

$$\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_4(\frac{16}{64}) = \log_4 16 - \log_4 64 = 2 - 3 = -1$$

№4 | Умножение логарифмов

При умножении двух логарифмов можно поменять местами их основания при a, b, c, d > 0, a ≠ 1, c ≠ 1.

$$\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d$$

$$\log_3 4 \cdot \log_4 3 = \log_3 3 \cdot \log_4 4 = 1$$

№5 | Формула замены аргумента

Формула замены аргумента логарифма в показателе при a, b, c > 0, a ≠ 1.

$$c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$$

$$25^{\log_5 3} = 3^{\log_5 25} = 3^2 = 9$$

№6 | Формула замены основания

Формула перехода к новому основанию при a, b, c > 0, a ≠ 1, c ≠ 1.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\frac{\log_6 4}{\log_6 3} = \log_3 4.$$

№7 | Формула перехода к новому основанию

Формула перехода к новому основанию при a, b > 0, a ≠ 1, b ≠ 1.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{\log_3 9} = \frac{1}{2}$$

Логарифмические уравнения

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где a - положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.
После нахождения корней логарифмического уравнения необходимо проверить условие: подлогарифмическое выражение должно быть больше 0.

РАВНОСИЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Решение уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

f(x), g(x) - функции с переменной x.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Решение уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Решение уравнения вида $\sqrt{f(x)} = a$

$$\sqrt{f(x)} = a \iff f(x) = a^2$$

Решение уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

f(x), g(x) - функции с переменной x

БЛОК СТЕПЕНЕЙ

Определение и частные случаи

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ раз}} \qquad 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ раза}} = 81$$

степень → a^n ← показатель, основание

Основание a с показателем 1 - само число a:

$$a^1 = a$$
$$5^1 = 5$$

Основание a с показателем 0 - единица:

$$a^0 = 1$$
$$5^0 = 1$$

Чётный показатель

Степень с отрицательным основанием и чётным показателем равна степени с основанием, противоположным исходному основанию, и с тем же показателем.

$$(-a)^{2n} = a^{2n}$$, где 2n - четный показатель (любое четное число: 2,4,6 и тд.)

$$(-5)^2 = 25$$

Корень в виде степени

Радикал (корень) можно представить в виде степени с дробным показателем:

$$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$$

$$\sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4$$

Отрицательный показатель

Если n — натуральное число и a ≠0 , то под a^{-n} понимают:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2}$$

№1 | Произведение степеней

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся без изменений, а показатели степеней складываются.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

“a” — любое число, а “m”, “n” — любые натуральные числа.

№2 | Частное степеней

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся без изменений, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

“a” — любое число, не равное нулю, а “m”, “n”— любые натуральные числа.

№3 | Степень в степени

При возведении степени в степень основание степени остаётся без изменения, а показатели степеней перемножаются.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

“a” — любое число, а “m”, “n” — любые натуральные числа.

№4 | Степень произведения

При возведении в степень произведения каждый из множителей возводится в степень. Затем полученные результаты перемножаются.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

”a”, “b” — любые рациональные числа; “n” — любое натуральное число.

№5 | Степень частного

Чтобы возвести в степень частное, можно возвести в эту степень отдельно делимое и делитель, и первый результат разделить на второй.

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

“a”, “b” — любые рациональные числа, b ≠ 0, n — любое натуральное число.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ

1) $a^0 = 1$
2) $a^1 = a$
3) $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$
4) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
5) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
6) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
7) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
8) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
9) $(a : b)^n = a^n : b^n$